Patrick Suppes

Estudios de filosofía y metodología de la ciencia

Introducción y selección
de José Luis Rolleri

Alianza
Editorial

© Patrick Suppes
© de la introducción y las notas: José Luis Rolleri
© Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1988
Calle Milán, 38, 28043 Madrid; teléf. 200 00 45
ISBN: 84-206-2547-7
Depósito legal: M. 18.774-1988
Fotocomposición: Efca
Impreso en Lavel. Los Llanos, nave 6. Humanes (Madrid)
Printed in Spain

INDICE

Prefacio 9

Introducción 15

CAPÍTULO 1. Filosofía y los fundamentos axiomáticos de la física 21

CAPÍTULO 2. Algunas consideraciones sobre los problemas y métodos de la filosofía de la ciencia 29

CAPÍTULO 3. El método axiomático en las ciencias empíricas 39

CAPÍTULO 4. La deseabilidad de la formalización en ciencia 59

CAPÍTULO 5. La pluralidad de la ciencia 75

CAPÍTULO 6. El papel de los métodos formales en la filosofía de la ciencia 93

CAPÍTULO 7. Una comparación del significado y los usos de los modelos en las matemáticas y las ciencias empíricas 109

CAPÍTULO 8. La estructura de las teorías y el análisis de datos 125

CAPÍTULO 9. Modelos de datos 147

CAPÍTULO 10. Medición: problemas teóricos y de aplicación 161

CAPÍTULO 11. Un conjunto de axiomas independientes para cantidades extensivas 173

CAPÍTULO 12. Estructuras finitas de medición de intervalos iguales 185

CAPÍTULO 13. Problemas del análisis causal en las ciencias sociales 203

Referencias 215

Bibliografía de Patrick Suppes 225

PREFACIO*

La publicación en castellano de trece de mis artículos compilados por José Luis Rolleri, los cuales cubren un período de más de treinta años, es para mí un evento agradable y digno de nota. Los capítulos no han sido ordenados cronológicamente sino más bien de acuerdo con su contenido conceptual, comenzando con una serie sobre el método axiomático en las ciencias empíricas. Se puede apreciar una clara variación de mis puntos de vista filosóficos entre los primeros capítulos sobre el método axiomático, referidos particularmente a la física, y el quinto capítulo, escrito en 1978, sobre la pluralidad de la ciencia.

Los capítulos séptimo, octavo y noveno tratan del concepto de modelo en las ciencias empíricas, incluyendo modelos de datos empíricos. Los siguientes tres capítulos, esto es, diez, once y doce, se ocupan de la teoría de la medición. Mi primera publicación es el capítulo once de este volumen, pero mi interés en la teoría de la medición continúa hasta hoy sin mengua. El capítulo trigésimo, el último de todos, presenta de manera general mis ideas acerca del análisis causal en las ciencias sociales.

Esta es una buena ocasión para decir algo informal acerca de cada uno de los cuatro tópicos cubiertos por los trece capítulos. La bi-

* Versión castellana de Adolfo García de la Sierra.

bliografía de mi trabajo, al final de este volumen, incluye más publicaciones técnicas que tratan estos tópicos con mayor detalle.

1. Fundamentos axiomáticos de las ciencias empíricas

El uso de métodos conjuntistas en la filosofía de la ciencia es quizá uno de los aspectos de mi trabajo por los cuales soy más conocido entre los filósofos. Tal punto de vista conjuntista no es más que un punto de vista axiomático moderno dirigido hacia las ciencias empíricas. La aplicación del método axiomático a las ciencias empíricas tiene una larga y clásica historia, comenzando con la ciencia y la matemática griegas.

Los objetivos del método axiomático en las ciencias empíricas son múltiples, pero ciertamente los objetivos de clarificar y explicitar los fundamentos de una disciplina son razones centrales para desarrollar sus fundamentos en forma axiomática. Lo que el método axiomático no proporciona es certeza o completud de los fundamentos teóricos. Es una marca característica de la ciencia contemporánea el que una gran variedad de teorías, modelos y técnicas se encuentren en toda disciplina. La riqueza de la ciencia moderna es demasiado vasta e intrincada como para ser abarcada por un solo esquema de análisis axiomático. Enfatizo que esto es verdad no sólo para la ciencia como una totalidad o para una sola disciplina como la física, sino también para todas las subdisciplinas principales. El número de artículos, monografías y tratados sobre cualquier materia de importancia científica es ahora tan grande que cualesquiera esquemas simples de unificación están destinados a ser rebasados por la riqueza de las obras que han sido producidas. Pero este es un saludable estado pluralista de cosas. No significa que no hay lugar para el método axiomático. Lo que significa es que el programa de reduccionismo, que fue una parte tan importante de la filosofía de la ciencia desde el tiempo de Frege hasta Carnap, es visto ahora propiamente como un objetivo ingenuo e ilusorio.

Pero en las partes florecientes de la ciencia en desarrollo teórico activo el método axiomático continúa teniendo un papel importante y significativo. Sus aplicaciones se pueden encontrar en la actualidad en toda disciplina de importancia, desde la teoría del campo cuántico en física hasta las definiciones de la pobreza en economía.

2. Modelos de datos

En los capítulos siete, ocho y nueve de este volumen tengo algo que decir acerca del uso de los modelos en las ciencias empíricas, especialmente con referencia a los datos. Sin embargo, lo que tengo que decir es ciertamente incompleto. Esta incompletud se aplica no sólo a lo que se publica aquí, sino también a lo que he publicado sobre estas materias en otra parte. Entre mis variados intereses en la filosofía de la ciencia, es éste en el que me siento más comprometido a intentar algo sustancial en el futuro.

En toda disciplina científica desarrollada las relaciones entre los datos y la teoría son intrincadas, y con frecuencia tan sutiles, que legos tales como los filósofos de la ciencia encuentran que es un asunto difícil desenmarañar su naturaleza. Hasta cierto punto, este problema se torna confuso debido al estilo moderno en que los libros de texto están escritos. Por ejemplo, es muy difícil encontrar un texto introductorio a la mecánica cuántica que incluya una presentación seria de los datos que apoyan a la teoría.

Pero no es un mero asunto de presentación de los datos en libros de texto, sino un asunto de análisis filosófico, hacer a las relaciones entre el experimento, los datos y la teoría más explícitos que lo que ahora son en cualquier parte de la ciencia. Lo más que espero haber logrado en los tres artículos en este volumen es el haber proporcionado un sentido de la complejidad de las relaciones entre los datos y la teoría.

3. Medición

La preocupación central de la teoría de la medición es justificar el tránsito de las operaciones y relaciones cualitativas observables a su representación numérica en forma cuantitativa. Dado que tal empresa es tan cercana a tantos temas filosóficos de análisis, no es sorprendente el que haya habido un interés continuado en los fundamentos de la medición dentro de la filosofía de la ciencia. Pienso que los tres artículos publicados en este volumen dan una buena idea de los tipos de análisis que han sido realizados para resolver el problema central de la medición cuantitativa. Algunos de los tipos de consideraciones técnicas que necesariamente juegan un papel importante

en la teoría se pueden ver ya en el artículo de 1951 sobre las cantidades extensivas. Yo enfatizaría, sin embargo, que el interés filosófico en la materia es más conceptual que técnico. Es este tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo lo que resulta de primordial importancia. Simplemente lamento que los mucho más intrincados problemas que surgen al analizar este tránsito cuando las relaciones son probabilísticas más que determinísticas no puedan ser propiamente representados aquí, infortunadamente debido precisamente a que la teoría de tales relaciones probabilísticas es inevitablemente más complicada.

4. Causalidad probabilística

En varios artículos desde la publicación en 1970 de mi monografía sobre causalidad probabilística he tratado de defender o extender el análisis en varias direcciones. El último capítulo de este volumen da una buena idea acerca de cómo la teoría de la causalidad probabilística puede ser aplicada en las ciencias sociales. Quisiera enfatizar que las aplicaciones en la física son tan extensas como en las ciencias sociales, especialmente al continuadamente controvertido problema de la existencia de variables ocultas. El lenguaje de las *variables ocultas* desde luego habla acerca de causas subyacentes y encaja muy bien dentro del marco formal analizado en el artículo final.

Ciertamente la presente teoría de la causalidad probabilística no es la última palabra, pero es fácil proporcionar ejemplos tomados de diferentes ciencias para mostrar que los métodos son tanto de interés filosófico como de valor práctico. No es factible pronosticar seriamente cuáles serán las formas importantes de análisis causal en el siglo próximo, pero me sorprendería de todos modos que los métodos probabilísticos no continuaran dominando el análisis causal en muchos dominios científicos.

Reconocimientos

Finalmente, quisiera expresar mi más profundo aprecio a José Luis Rolleri por organizar este volumen para su publicación. Quisiera agradecer también a Adolfo García de la Sienra y a Jesús Mosterín

por animarme de diversas maneras a dar a conocer este volumen al público de habla castellana.

PATRICK SUPPES
Stanford University
Stanford, California
Julio 1986

INTRODUCCION

A principios de los años cincuenta, Suppes, McKinsey y colaboradores concibieron un programa de fundamentación axiomática de las teorías empíricas. Tarski los estimuló a proseguir por axiomatizaciones de las ramas desarrolladas de la ciencia empírica, usando como instrumento de formalización a la teoría intuitiva de conjuntos, a diferencia de las formalizaciones estándar, propuestas por Carnap, que pretenden utilizar la lógica de primer orden. En 1954, Suppes delineó explícitamente este programa, bajo el cual se pretende obtener progresos sustanciales y sólidos en la filosofía de la ciencia (véase capítulo 2). En el transcurso de esa década, Suppes y colegas de la Universidad de Stanford mostraron que a través de la teoría intuitiva de conjuntos puede alcanzarse el mismo nivel de rigor formal y claridad conceptual en la formulación axiomática de las teorías empíricas que es estándar en el trabajo matemático.

En Mckinsey *et al* (1953) se publicó el primer trabajo dentro de este programa. En él, los autores enuncian conjuntistamente un sistema axiomático para la mecánica clásica de partículas en el que la segunda Ley de Newton es la única ley física que aparece como axioma. Exhibieron además la independencia de las nociones físicas usadas como primitivas y derivaron la primera Ley de Newton como

teorema (el capítulo 1 contiene una exposición relativamente no técnica de esta axiomatización restringida a sistemas tridimensionales). Otros resultados importantes fueron obtenidos en años posteriores. Adams axiomatizó conjuntistamente la mecánica del sólido rígido y, posteriormente, derivó las leyes de esta teoría de aquellas de la mecánica clásica de partículas (Adams [1954] y [1959], respectivamente). En 1954, Rubin definió conjuntistamente los sistemas genéticos mendelianos. A su vez, Suppes ofreció un conjunto de axiomas para la mecánica relativista de partículas (Suppes [1959]). Otros trabajos, más bien metateóricos, son McKinsey y Suppes (1953) y Rubin y Suppes (1954). En esta Antología, Suppes explica y ejemplifica el método de axiomatización conjuntista en los capítulos 1 y 2, discute el papel del método axiomático en las ciencias empíricas, analizándolo en particular en la medición, la física y los lenguajes naturales en el capítulo 3 y presenta una argumentación general a favor de la formalización de la ciencia en el capítulo 4.

Suppes no es autor de voluminosos tratados filosóficos sino más bien de breves estudios detallados y técnicos sobre cuestiones relativamente particulares de relevancia científica, trabajadas con rigor formal. Metodológicamente equipado con las teorías de conjuntos, de modelos, de la probabilidad y la estadística matemática se enfrenta con problemas científicamente importantes, procediendo más bien como un lógico: los plantea claramente en términos formales, propone una solución matemáticamente rigurosa y señala aquellos problemas conectados que encuentra abiertos (muestra de ello está, por ejemplo, en los capítulos 11 y 13). Comparando el trabajo realizado en la primera mitad de siglo veinte en lógica y en filosofía de la ciencia, Suppes arguye que en esta última no existe un núcleo sólido de resultados similares a los logrados durante el período en lógica. Su programa de fundamentación de la ciencia precisamente va encaminado a obtener resultados sólidos, aunque parciales, en el campo de la filosofía de la ciencia.

Sin embargo, Suppes ha mantenido una posición escéptica acerca de los avances que puedan realizarse bajo su programa. Esta se debe, en parte, a que en ciertas ramas de la física moderna, como en la mecánica cuántica, y en ciertas teorías de las ciencias sociales, como la psicología, la lingüística y la economía, hay una considerable falta de claridad conceptual y, en parte, a que en ellas existen problemas sumamente complejos, los cuales requieren, previamente, un tratamiento riguroso probabilístico y estadístico; habrá primero que analizar

informalmente los posibles fundamentos conceptuales que cuentan con apoyo empírico en esas disciplinas para esperar una eventual axiomatización de ellas. El escepticismo de Suppes es aún más agudo en sus argumentaciones en contra de las múltiples búsquedas de certeza y completud del conocimiento científico (véase capítulo 5). Aunque ciertamente no son viables pruebas formales acerca de la imposibilidad de las tesis de la certeza y la completud de ramas de la ciencia empírica, como la física, Suppes muestra la implausibilidad de tales tesis en base a la evidencia científica disponible (véase, también, Suppes [1984]).

Si bien Suppes propone a la teoría de conjuntos como una metodología formal general para ser aplicada a cualquier problema con claridad conceptual en la filosofía de la ciencia, aboga igualmente a favor de otros procedimientos formales que ofrecen un nivel razonable de rigor, como son: la lógica de primer y segundo orden (extensional e intensional), el enfoque de procedimientos de la computación y el enfoque del rigor informal propuesto por Kreisel. En el capítulo 6, Suppes arguye que esta variedad de procedimientos formales son aplicables a varios y diversos problemas en el campo de la filosofía de la ciencia. Esta posición pluralista de Suppes es más profunda dentro de la ciencia misma. En el capítulo 5, Suppes argumenta, con apoyo en análisis concretos de diferentes teorías científicas, en contra de las tesis reduccionistas de la unidad de la ciencia, en el lenguaje, método y objeto de estudio, del empirismo lógico, defendiendo la necesidad de una diversidad de lenguajes en las distintas ramas y subramas de la ciencia empírica, así como la diferente naturaleza de sus objetos de estudio y de una pluralidad de métodos aplicables a los diversos campos de estudio de la ciencia.

Suppes adelantó, por primera vez, la idea de que el mismo concepto lógico de modelo es aplicable tanto a teorías matemáticas como a teorías físicas o, más bien, que el clásico concepto de modelo de Tarski, como una realización posible que satisface todos los enunciados válidos de una teoría, es igualmente aplicable a las teorías de la ciencia física e, incluso, a las teorías empíricas en general. En el capítulo 7 de esta Antología, Suppes argumenta a favor de esta tesis, abogando, además, que es el uso del concepto del modelo, y no su significado, lo que varía en las ciencias empíricas respecto de las matemáticas, mostrando cómo los usos variantes de la palabra «modelo» en ciencias como la física, la economía y la estadística matemática, pueden encajar en el mismo concepto lógico de modelo. Suppes

extiende este enfoque modelo-teórico suyo no solamente a teorías de la medición fundamental (véase, p. ej., capítulo 11) sino incluso a teorías del experimento. En el capítulo 9, Suppes propone aplicar este enfoque para constuir modelos de datos experimentales, i. e., modelos de teorías de experimentos relevantes para una teoría científica puesta a prueba. Su tratamiento de los datos incluye un estudio de las teorías del error de los procedimientos experimentales. En el capítulo 8 nos presenta una clasificación de las teorías científicas, deterministas y probabilistas, de acuerdo al tipo de datos experimentales que manejan, corregibles o incorregibles, i. e., aquellos para los que se cuenta con una teoría del error o aquellos para los que no.

La obra de Suppes sobre las teorías de medición es muy amplia. El se ha preocupado principalmente por construir teorías realistas de medición, i. e., teorías que bajo sus interpretaciones factuales propuestas cuenten con un correlato operacional realizable de manera efectiva, formuladas axiomáticamente. Ya en 1954 (véase el capítulo 2), Suppes anunció este enfoque suyo. En el capítulo 11 de esta Antología se encuentra el trabajo que reabrió la investigación de los fundamentos axiomáticos de la medición en tiempos recientes. Este enfoque axiomático a la medición de Suppes abarca no solamente la enunciación formal de los axiomas de las teorías, y la derivación lógica de sus teoremas, sino también la demostración del teorema de representación, i. e., probar que cualquier estructura que satisface los axiomas puede mapearse homomórficamente en los números reales, y el teorema de unicidad, i. e., probar en qué medida la representación demostrada es única mostrando bajo qué tipo de transformaciones se preserva. Suppes además de ocuparse de estos teoremas en los ejemplos de medición, tanto fundamental como derivada, de cualidades extensivas o intensivas, dados en los capítulos 10, 11 y 12, en el décimo discute los problemas generales que se encuentran en el tratamiento axiomático de las teorías de la medición.

En esta Antología he recogido, capítulo 13, una muestra del trabajo de Suppes en el campo de la filosofía de la probabilidad en el que él ha contribuido significativamente, en particular en el problema de dar un análisis probabilista adecuado del concepto de causalidad. Aquí el lector encontrará precisamente una discusión sobre la aplicación de nociones probabilistas a la causalidad en las ciencias sociales.

Deseo manifestar mi agradecimiento al Profesor Suppes por haber escrito un prefacio para esta compilación. Igualmente agradezco

a los señores editores de Alianza Editorial su interés en esta publicación y a los señores traductores su cooperación. Parte de este trabajo lo realicé durante mi estancia en 1985, en un año sabático, en el Instituto de Investigaciones Filosóficas de la Universidad Nacional Autónoma de México; expreso también mis agradecimientos a esa Institución.

JOSÉ LUIS ROLLERI
Universidad Michoacana

REFERENCIAS

ADAMS (1954): E. W. Adams, *Axiomatic Foundations of Rigid Body Mechanics*, Stanford University, tesis doctoral, 1955.

ADAMS (1959): E. W. Adams, «The Foundations of Rigid Body Mechanics and the derivation of its Laws from those of Particle Mechanics», en *The Axiomatic Method*, L. Henkin *et al* (eds.), Amsterdam, 1959.

MCKINSEY *et al* (1953): J. C. C. McKinsey, A. C. Sugar y P. Suppes, «Fundamentos axiomáticos de la mecánica clásica de partículas», *Lecturas Filosóficas*, México n.° 1, 1979.

MCKINSEY y SUPPES (1953): J. C. C. McKinsey y P. Suppes, «Transformations of Systems of Classical Particle Mechanics», *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2, 1953.

RUBIN y SUPPES (1954): H. Rubin y P. Suppes, «Transformations of Systems of Relativistic Particle Mechanics», *Pacific Journal of Mathematics*, 4, 1954.

SUPPES (1959): P. Suppes, «Axioms for Relativistic Kinematics with or without Parity», en *The Axiomatic Method*, L. Henkin *et al* (eds.), Amsterdam, 1959.

SUPPES (1984): P. Suppes, *Probabilistic Metaphysics*, Basil Balckwell, Oxford-Nueva York, 1984.

Capítulo 1
FILOSOFIA Y LOS FUNDAMENTOS AXIOMATICOS DE LA FISICA*

Durante los dos últimos años, la Facultad de Filosofía de la Universidad de Stanford ha dedicado algún tiempo a investigaciones sobre los fundamentos axiomáticos de varias ramas de la física. En la presente comunicación nos proponemos dar una breve explicación, relativamente no técnica, de la naturaleza de este trabajo y explicar su relevancia con problemas más generales de la filosofía de la ciencia[1].

Por una *axiomatización* de una rama de la ciencia empírica, o de una rama de las matemáticas, aquí queremos decir una definición de un predicado conjuntista; usualmente, de un predicado que se aplica a un *n*-tuple ordenado (para un *n* fijo). Así, en nuestra comprensión del término, la siguiente definición constituye una axiomatización de la teoría del orden simple.

---

* Publicado originalmente en los *Proceedings of the XIth. International Congress of Philosophy*, Vol. VI, *Philosophy and Methodology of the Sciences of Nature*, Bruselas, 1953. (North-Holland, Amsterdam, pp. 49-54). Versión castellana de José Luis Rolleri.

[1] Estamos agradecidos con el Profesor Donald H. Davidson por algunas sugerencias y críticas útiles.

Definición 1. Γ es un *orden simple* si y sólo si hay un conjunto K y una relación binaria R tal que $\Gamma = \langle K, R \rangle$ (i.e, Γ es un par ordenado cuyo primer miembro es K y cuyo segundo miembro es R) tal que para toda x, y, z: (i) si $\langle x, y \rangle \in R$, entonces $x \in K$ e $y \in K$; (ii) si $x \in K$ e $y \in K$, entonces o $\langle x, y \rangle \in R$ o $\langle y, x \rangle \in R$; (iii) si $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, z \rangle \in R$, entonces $\langle x, z \rangle \in R$; (iv) si $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, x \rangle \in R$, entonces $x = y$.

Podemos señalar que cuando una disciplina es axiomatizada de esta manera, los teoremas de la disciplina se convierten en teoremas de la teoría de conjuntos. De esta manera el siguiente es un teorema de la teoría de conjuntos considerando el predicado definido «es un orden simple»:

Si $\langle K, R \rangle$ es un orden simple y $x \in K$, entonces $\langle x, x \rangle \in R$.

Además de los términos del cálculo de predicados más bajo («y», «existe», etc.), una axiomatización puede contener tanto términos primitivos como definidos de la teoría de conjuntos. Así la Definición 1 contiene los términos primitivos «conjunto» y «$\in$» de la teoría de conjuntos, así como los términos «par ordenado» y «relación binaria», cuyas definiciones dentro de la teoría de conjuntos son bien conocidas. Similarmente, una axiomatización puede contener tales términos definidos de la teoría de conjuntos como «número real», «función continua» y «series convergentes». Pero es esencial que una axiomatización no contenga términos del lenguaje ordinario que no pertenecen ni al cálculo de predicados más bajo ni a la teoría de conjuntos; así no consideramos una axiomatización a algo si contiene términos tales como «observación» e «información». Algunos de los «sistemas de axiomas» que han sido propuestos[2] para ramas de la ciencia empírica violan este canon, incluso de manera que no es fácil ver cómo podrían transformarse en axiomatizaciones en nuestro sentido de la palabra.

Como lo hemos implicado anteriormente, significamos por una axiomatización de una rama de la ciencia empírica, exactamente el mismo tipo de definición conjuntista que tenemos en mente cuando

[2] Véase por ejemplo Bhabha (1949), pp. 451-462, donde el «Postulado 2» es el siguiente: «Existe una función Ψ, llamada la función onda, cuyos valores están definidos en todos los puntos en una superficie semejante al espacio, tal que provee la cantidad máxima posible de *información* que puede ser obtenida por *observación* acerca del sistema del estado físico». (Subrayado nuestro.)

hablamos de una axiomatización de una rama de las matemáticas. Para ilustrar este punto, y para proveer un ejemplo para algunas consideraciones generales que queremos hacer después, damos ahora una axiomatización de la mecánica clásica de partículas que ha sido desarrollada por nosotros en colaboración con el doctor A. C. Sugar[3]. Elegimos este ejemplo particular debido a la familiaridad de su objeto y a la simplicidad relativa de la entidad conjuntista que involucra; algunos señalamientos considerando la interpretación física propuesta de los términos empleados se encontrarán inmediatamente después de la definición.

Definición 2. Γ es un *sistema de la mecánica clásica de partículas* si y sólo si existen los conjuntos P y T y las funciones m, s y f tales que $\Gamma = \langle P, T, m, s, f \rangle$ y: (i) P es un conjunto finito no vacío; (ii) T es un intervalo de números reales; (iii) m es una función unaria, cuyo dominio de definición es P, y cuyos valores son números reales positivos; (iv) s es una función binaria cuyo dominio de definición es el producto cartesiano de P y T (i. e., el conjunto de todos los pares ordenados $\langle p, t \rangle$, donde $p \in P$ y $t \in T$), y cuyos valores son vectores tridimensionales; (v) f es una función ternaria cuyo dominio de definición es el producto cartesiano de P, T y el conjunto de todos los enteros positivos, y cuyos valores son vectores tridimensionales; (vi) para cualquier p en P y t en T, las series infinitas (de vectores)

$$\sum_{i=1}^{\infty} f(p, t, i)$$

son absolutamente convergentes; (vii) para cualquier p en P y t en T, la segunda derivada $((d^2/dt^2)\, s\, (p, t))$ de la función s existe y satisface la ecuación

$$m(p)(d^2/dt^2)s(p, t) = \sum_{i=1}^{\infty} f(p, t, i)$$

[3] La axiomatización dada es esencialmente la misma (excepto que aquí nos restringimos a sistemas tri-dimensionales) que la ofrecida en un artículo del Doctor Sugar y nosotros, McKinsey *et al* (1953).

En la interpretación física propuesta, un sistema $\langle P, T, m, s, f \rangle$ de la mecánica clásica de partículas será tal que: (1) P es un conjunto de partículas (las cuales pueden ordinariamente ser concebidas o como pequeños cuerpos o como los centros de masa de los cuerpos); (2) T es un intervalo de números reales que mide tiempo transcurrido (en términos de alguna unidad de tiempo y medidos desde algún origen temporal); (3) para toda p en P y t en T, $s\ (p, t)$ es un vector que da la posición de p en el momento t; (5) para toda p en P y t en T, y para cualquier entero positivo i, $f\ (p, t, i)$ es un vector que da las componentes (paralelas a los ejes del sistema de coordenadas) de la i-ésima fuerza actuante en p en el momento t. (En las interpretaciones físicas, el orden de las fuerzas aplicadas puede ser arbitrario: así no tiene ningún interés que $f\ (p, t, 1)$ es la primera y $f\ (p, t, 2)$ es la segunda fuerza actuante en p en el momento t; sólo es importante que $f\ (p, t, 1)$ y $f\ (p, t, 2)$ se distingan.)

Es bien conocido que la teoría de conjuntos puede ser formalizada dentro del cálculo de predicados más bajo. Sin embargo, todos los términos que ocurren en la Definición 2 o ya son términos del cálculo de predicados más bajo o son definibles dentro de la teoría de conjuntos. De ahí, la Definición 2 podría ofrecer una formalización de la teoría de la mecánica clásica de partículas dentro del cálculo de predicados más bajo.

Puede ser señalado, sin embargo, que para algunos propósitos sería deseable proveer formalizaciones independientes de varias ramas de la física, sin ir a través de la teoría de conjuntos. Tales formalizaciones independientes podrían ser útiles para el tratamiento de ciertos problemas; por ejemplo, el problema de establecer metateoremas que relacionen los enunciados demostrables en una rama formalizada de la física con aquellos demostrables en otra. Hasta el momento, sin embargo, no nos hemos ocupado con tales problemas «meta-físicos», y hemos encontrado innecesarias dichas formalizaciones independientes.

Ahora vamos a algunas observaciones y consideraciones que se proponen indicar la utilidad del método axiomático para la filosofía de la ciencia en general.

En primer lugar, debe notarse que nuestra axiomatización de la mecánica clásica de partículas nos provee de una ilustración específica de algunas consideraciones generales que pueden hacer los filósofos acerca de las teorías científicas. Por ejemplo, la tesis que es parte de la doctrina del convencionalismo, de que se hacen en ciencia em-

pírica ciertas suposiciones con propósitos puramente formales, es ilustrada por la condicón (ii) de la Definición 2: desde el punto de vista de lo que es empíricamente verificable, esta condición podría ser reemplazada por la suposición más débil de que T sea un conjunto de números reales que contiene todos los números racionales de algún intervalo; pero esta suposición más débil sería matemáticamente inconveniente.

El intento de derivar de la Definición 2 los teoremas esperados acerca de los sistemas de la mecánica clásica de partículas hace llamativamente patente que las formulaciones usuales de la mecánica emplean conectivas enunciativas de un género no extensional: así comúnmente se dice que el centro de masa de un sistema de partículas se mueve *como si* todas las masas *estuvieran concentradas* ahí, y que la resultante de todas las fuerzas *actuarán* ahí; y se dice que una partícula está en un campo conservativo de fuerza si el trabajo realizado en moverla alrededor de cualquier camino cerrado *posible* es cero. El carácter controvertido de la amplia literatura en lógica modal y condicionales subjuntivos, por el otro lado, hace deseable desarrollar la física teórica dentro de un marco conceptual de lógica extensional. En los casos que hemos considerado aquí, parece que esas locuciones no extensionales pueden ser evitadas[4] considerando familias de sistemas del tipo en cuestión, que están relacionadas entre sí de una manera apropiada. Más aun, no vemos otra manera de evitar tales locuciones.

La presentación axiomática de varias ramas de la ciencia también arroja luz sobre el significado del reduccionismo[5], el cual usualmente se caracteriza sólo en las siguientes líneas: una rama de la ciencia empírica se dice que es reducible a otra si las leyes de la primera rama son consecuencias de aquéllas de la segunda. Un ejemplo clásico es la reducción de la termodinámica a la mecánica estadística. Cuestiones acerca de la reducibilidad no pueden ponerse de una forma muy aguda cuando intentamos basar nuestra discusión sobre las formulaciones de la ciencia corrientemente recibidas. En las formulaciones usuales de la termodinámica, por ejemplo, no se hace ninguna distinción de corte claro entre hechos experimentales y suposiciones teó-

[4] Para un tratamiento extensional del centro de masa, véase McKinsey *et al* (1953), Teorema 3.

[5] Una discusión general del significado de la reducción puede encontrarse en el trabajo de Ernest Nagel, Nagel (1949).

ricas, e incluso no es manifiesto qué se considera como el carácter conjuntista de un sistema de la termodinámica. Por el otro lado, tan pronto como tenemos un análisis axiomático de dos ramas de la física teórica, la cuestión de si una de ellas es reducible a la otra puede formularse de una manera clara, y en algunos casos, contestarse definitivamente. Por ejemplo, un estudiante nuestro, el Sr. Ernest Adams, ha mostrado que la mecánica clásica del sólido rígido es, en un sentido definido, reducible a la mecánica clásica de partículas: usando nuestra axiomatización de la mecánica clásica de partículas, él ha definido la noción de un sistema de la mecánica del sólido seudo-rígido, en donde por un sólido seudo-rígido se significa (intuitivamente) un conjunto finito de partículas cuyas distancias mutuas permanecen invariantes a través del tiempo; él entonces ha demostrado que para cada sistema de la mecánica del sólido rígido[6] existe un sistema de la mecánica del sólido seudo-rígido que es en un sentido apropiado isomórfico a aquél. Sin un análisis axiomático es imposible mostrar de una manera precisa similar que la termodinámica es reducible a la mecánica estadística.

Estrechamente conectada con el problema de la reducción está la cuestión de cómo una teoría «clásica» que se ocupa de cierto dominio de fenómenos está relacionada con una teoría «moderna» de los mismos fenómenos. Por ejemplo, uno obtiene una comprensión precisa de la relación entre mecánica clásica de partículas y la mecánica relativista de partículas (en el sentido de la teoría especial de la relatividad) comparando la axiomatización dada en este artículo con una axiomatización de la mecánica relativista de partículas dada por el Profesor Herman Rubin y uno de los presentes autores[7].

El análisis axiomático de la física, además de clarificar varios problemas filosóficos estándar, frecuentemente sugiere nuevos problemas que son interesantes para el filósofo, y que de otra manera no serían fácilmente formulados. Por ejemplo, en vista de la falta de acuerdo entre varios autores hasta ahora al considerar su tratamiento de la Tercera Ley de Newton, es para uno un enigma si se incluye esta ley como una de las condiciones de la Definición 2. El problema entonces surge de si cada sistema en el sentido de la Definición 2 es un subsistema de un sistema que satisface la Tercera Ley. La respues-

[6] La axiomatización de la mecánica clásica del sólido rígido usada en conexión a esto se debe conjuntamente al Sr. Adams y al Profesor Herman Rubin.

[7] En Rubin y Suppes (1954).

ta a esta cuestión resulta ser afirmativa[8]; lo cual en una considerable medida justifica la omisión de esta ley de las condiciones de la Definición 2. Un segundo ejemplo es el problema de determinar el conjunto *S* de transformaciones que siempre lleva sistemas de la mecánica de partículas a sistemas de la mecánica de partículas. Puede mostrarse que cada transformación galileana pertenece a *S*, al cambiar las unidades de medición; más aun, cada miembro de *S* que satisface cierta hipótesis más débil es expresable como un producto de transformaciones galileanas y cambios de unidad[9].

En conclusión, nos gustaría urgir que, aparte de estos varios argumentos especiales a favor de la axiomatización de las ciencias, tal programa posee para los filósofos el valor intrínseco de hacerlo capaz de conocer de lo que él está diciendo cuando habla de una u otra rama de la ciencia. Difícilmente podemos decir, por ejemplo, que entendemos lo que decimos por la mecánica clásica de partículas hasta que conocemos cuáles son los términos y leyes fundamentales de esta disciplina, y una manera de saber esto es dar a la ciencia una fundamentación axiomática.

---

[8] Véase McKinsey *et al* (1953), Teorema 8.
[9] Véase McKinsey y Suppes (1953).

Capítulo 2

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LOS PROBLEMAS Y METODOS DE LA FILOSOFIA DE LA CIENCIA*

¿Qué clase de disciplina es la filosofía de la ciencia? Sería difícil encontrar cualquier tipo de acuerdo en la respuesta a esta cuestión. Hay un gran número de físicos que han promovido la idea de que esta disciplina es un género de periodismo cósmico: cualquier nuevo descubrimiento mayor en física asegura, tomándolo como venga, un análisis de las fronteras del conocimiento científico hasta el último minuto. Por otro lado, las sirenas oxonienses del lenguaje ordinario nos dicen que cualquier escrutinio cuidadoso de cuestiones científicas técnicas no es propiamente una actividad filosófica. Quiero argüir aquí, que el filósofo de la ciencia no necesita ser ni un periodista de la ciencia ni meramente un hombre penetrante del sentido común, eternamente restringido a contemplar el significado general de nociones tales como la de la mente, el libre albedrío, causa y determinismo.

Durante el siglo pasado, la disciplina antigua y tradicional de la lógica ha sido transformada en una disciplina científica profunda y

---

* Publicado originalmente en *Philosophy of Science*, Vol. 21, n.º 3, 1954. Estoy agradecido con el Profesor Donald Davidson y la Sra. Muriel Winet por varias sugerencias útiles. Este escrito fue leído en la Reunión de 1953 de la División Pacífico de la Asociación Filosófica Americana. Versión castellana de José Luis Rolleri.

seria. Es verdad que hay, desde luego, una gran variedad de ensayos, que incluyen escritos sobre la lógica así como trabajos de lógica matemática, que abarcan desde exposiciones populares de la semántica a defensas desapasionadas de la primacía de la silogística aristotélica. Aun así, me parece que es cierto que cuando la lógica es mencionada en la filosofía contemporánea, un núcleo sólido de estudios y resultados viene a la mente de cualquier persona próxima al campo: los trabajos asociados a Russell, Whitehead, Gödel, Tarski, Church y Quine, para mencionar sólo unos cuantos lógicos eminentes.

No puede decirse que existe un núcleo sólido de estudios similares en la filosofía de la ciencia. En este dominio no existen resultados definitivos del tipo que existen en la lógica. Es imposible pensar en resultados análogos a los de Gödel sobre la consistencia y la completud, la definición de verdad de Tarski, o la demostración de Church de que no existe un procedimiento de decisión para el cálculo de predicados restringido.

El propósito de este artículo consiste en delinear un programa parcial de un tal núcleo de estudios en filosofía de la ciencia. Por razones de espacio, me restringiré a dos áreas generales: las teorías científicas y la teoría de la medición. Mi tesis consiste en que bajo estos dos encabezados no es difícil esbozar un programa de investigación serio que parece peculiarmente adecuado para filósofos con mentalidad científica.

1. Teorías científicas

Durante las dos o tres décadas pasadas, los filósofos positivistas han escrito con gran detalle acerca de la estructura de las teorías científicas. Recientemente, ellos han estado particularmente interesados en dar una explicación general de la significatividad científica, lo cual está relacionado con su explicación de esta estructura[1]. Aunque se han hecho en el curso de estas investigaciones muchas distinciones precisas e interesantes, ha habido pocos intentos, si es que alguno, por filósofos que trabajan en esta tradición positivista de dar un análisis detallado de teorías científicas particulares.

Algunos físicos y matemáticos, trabajando en líneas diferentes, se

[1] Para una revisión de la literatura véase Hempel (1950a) y (1950b).

han interesado en dar claridad en los fundamentos de varias ramas particulares de la física (p. ej., Mach (1942), Hamel (1908 y 1901), Frank (1946), Lindsay y Margenau (1936)). Científicos que trabajan en otros dominios han estado similarmente interesados respecto de sus disciplinas. Hay, por ejemplo, escritos de biólogos sobre los fundamentos de la biología (p. ej., Woodger (1937 y 1952)) y escritos de economistas sobre los fundamentos de la economía (p. ej., Arrow (1951), Fraser (1937), Little (1950) y Robbins (1935)). Si tomamos como ejemplo a la literatura en los fundamentos de la física, concluimos más bien pronto que los físicos no están muy contentos con la tarea de investigación seria en fundamentos. La dificultad principal consiste en que los científicos practicantes rara vez son sensitivos a cuestiones que parecen ser de carácter puramente formal o matemático. Un excelente ejemplo consiste en las múltiples discusiones en relación a la definición de masa en la mecánica clásica. Mach (1942), pp. 264-277, propuso definir la masa relativa de dos cuerpos como la razón inversa de sus aceleraciones «mutuamente inducidas», cuando están aislados de otros cuerpos[2]. Esta sugerencia de Mach, ordinariamente es discutida como si él hubiera ofrecido una definición en el sentido ordinario, como, por ejemplo, cuando definimos la relación de «menor que» entre dos números reales x e y como la relación que vale si y sólo si hay un número real positivo z tal que $x + z = y$. Sin embargo, es fácil mostrar que para cualquier axiomatización más o menos razonable de la mecánica clásica, la noción de masa no puede ser definida en términos de otras nociones[3]. Por otro lado, si pensamos las ideas de Mach como una sugerencia de «definición coordinativa», esto es, un enunciado acerca de cómo aplicar empíricamente la noción teórica de masa, la condición de aislamiento requerida para los cuerpos, hace inútil su propuesta. La única alternativa razonable parece ser considerar su idea como una manera heurística sugerente de pensar acerca de un concepto empíricamente elusivo. El resultado final es que ni la física teórica ni la experimental han sido seriamente clarificadas por la discusión de Mach.

En vista de hacer progresos en los fundamentos, uno de los requisitos más importante es separar claramente la teoría del experimento. En lo que concierne a una reconstrucción racional precisa de

---

[2] Una discusión más reciente de las ideas de Mach se puede encontrar en Lindsay y Margenau (1936).

[3] Para una demostración de esta aserción véase McKinsey *et al* (1953).

la porción experimental de cualquier ciencia, parece haber algunos problemas extremadamente difíciles, acerca de los cuales se hablará más tarde. Pero en el campo de la teoría, el camino está intacto y ampliamente abierto. El método básico de ataque es la axiomatización en el sentido matemático estándar. Pero como Hempel ha señalado extensamente (1952, p. 81), al momento «La concepción de las teorías científicas presentadas en forma axiomática es una idealización hecha con propósitos de clarificación lógica y reconstrucción racional. Los intentos reales de axiomatizar teorías de la ciencia empírica han sido raros hasta ahora.»

Mi primera propuesta programática general consiste en que los filósofos de la ciencia hagan suya la tarea de axiomatizar las teorías de todas las ramas desarrolladas de la ciencia empírica. No tengo tiempo aquí para reseñar las varias consecuencias filosóficas interesantes de tal trabajo axiomático[4], pero a los filósofos que preguntan «¿por qué axiomatizar?», brevemente les digo que la axiomatización es una manera constructiva de obtener el tipo de claridad y precisión intelectuales que los filósofos siempre persiguen con respecto a los fundamentos de varias ciencias. Desafortunadamente muchos buenos filósofos parecen trabajar bajo la errónea impresión de que para axiomatizar a una disciplina científica, o a una rama de las matemáticas, se necesita formalizar a la disciplina en algún lenguaje artificial bien definido. Así, se mantiene que para axiomatizar la mecánica clásica de partículas debemos empezar por dar una definición recursiva de la noción de ser un enunciado de la mecánica de partículas. Este punto de vista lingüístico está, en mi opinión, seriamente equivocado, y la predominancia de esta actitud tal vez ha sido una de las principales razones de la falta de resultados substanciales positivos en la filosofía de la ciencia. Cuando recurrimos a cualquier rama de la ciencia que usa las matemáticas de una manera seria, claramente no queremos formalizar un lenguaje para esta rama de la ciencia. La tontería práctica de tal formalización está constatada por el hecho de que las ramas de las matemáticas necesarias para la física no han sido formalizadas, y los filósofos de la ciencia que intentan formalizar la mecánica, por ejemplo, habrían de formalizar primero no sólo el cálculo diferencial e integral, sino también la teoría de las matrices, la teoría de las ecua-

[4] Para consideraciones generales véase McKinsey y Suppes (1953a); algunas aplicaciones especiales a problemas de la teoría del significado se encuentran en McKinsey y Suppes (1955).

ciones ordinarias y diferenciales parciales y una buena porción de la teoría de las funciones de una variable real.

Afortunadamente podemos procurar un programa de axiomatización sin construir ningún lenguaje formal. El punto de vista por el que estoy abogando es que los métodos básicos apropiados para los estudios axiomáticos en las ciencias empíricas no son metamatemáticos (y así sintácticos y semánticos), sino conjuntistas. Axiomatizar la teoría de una rama particular de la ciencia empírica en el sentido que estoy defendiendo consiste en dar una definición de una noción conjuntista, tal como la de sistema de la mecánica clásica de partículas (véase McKinsey *et al* [1953]), o la de sistema de la mecánica del sólido rígido (véase Adams [1954]), o la de sistema de la genética mendeliana (Rubin (no publicado)). Los métodos usados para dar tales definiciones son precisamente similares a los usados en la matemática moderna para definir nociones tales como la de retículo, anillo algebraico o espacio de Hilbert. Podemos, desde luego, visualizar una formalización de la teoría de conjuntos y, consecuentemente, una formalización dentro de un único lenguaje de la porción teórica de todas las ramas de la ciencia empírica. Sin embargo, no existe al momento ninguna formalización de la teoría de conjuntos lo suficientemente desarrollada como para incluir las diversas ramas de la matemática ya mencionadas. En la práctica logramos un grado suficiente de rigor y claridad usando sin formalización las ramas de la matemática necesarias para el desarrollo de las ciencias empíricas. Y nuestro aparato básico conjuntista puede ser manejado de una manera intuitiva[5].

El trabajo conectado con la axiomatización en el sentido de dar una definición conjuntista de las nociones fundamentales de una rama dada de la ciencia empírica puede ser dividido en cuatro partes. Primera, es necesario que haya una declaración de cuáles teorías se su-

[5] Esto no es negar la gran significación de la teoría axiomática de conjuntos para los fundamentos de la matemática. Usar la teoría intuitiva de conjuntos cuando se estudian los fundamentos de las ciencias empíricas es simplemente un recurso. Con respecto a varias ramas de la matemática, la formalización (en el sentido de la construcción de un lenguaje artificial) no es necesaria, pero algunas veces es racionalmente necesario reconstruir dentro de la teoría intuitiva de conjuntos ciertos dominios matemáticos. Un buen ejemplo es la necesidad de reconstruir la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales para usarla al estudiar los fundamentos de la mecánica. Esta disciplina ordinariamente se presenta de una manera enteramente insatisfactoria desde el punto de vista de los fundamentos.

ponen. Por ejemplo, al axiomatizar la mecánica del sólido rígido, es conveniente suponer no sólo las ramas estándar de la matemática, sino también la mecánica clásica de partículas. Segunda, las nociones primitivas de la teoría requieren ser enlistadas y su carácter conjuntista indicado. Por ejemplo, en la mecánica de partículas necesitamos nociones primitivas tales como el *conjunto* de partículas, el *intervalo* de tiempo transcurrido, la *función* posición y la *función* masa (para detalles ulteriores véase McKinsey *et al* [1953]). Tercera, es necesario que la definición conjuntista sea completada enlistando los axiomas que deben satisfacerse. Estamos entonces en posición para investigar las consecuencias deductivas de nuestra definición. Una de las tareas principales consiste en reconstruir racionalmente los teoremas estándar de la rama de la ciencia manejada. También, disponible una axiomatización tal, podemos preguntar la clase de cuestiones características de la matemática moderna; por ejemplo, qué tipo de teoremas de representación pueden demostrarse. Podemos mencionar que el problema del *reduccionismo,* tan discutido en años recientes por los filósofos, podría ser estudiado más apropiadamente buscando teoremas de representación. Si puede encontrarse un teorema de representación para una rama de la ciencia en términos de una segunda, podemos apropiadamente decir que la primera ha sido *reducida* a la segunda[6]. Cuarta y última, se requiere dar una interpretación empírica de la teoría axiomatizada. De este tópico quiero ahora ocuparme, indicando sólo la manera como pueden ser útiles los métodos conjuntistas y axiomáticos incluso en dominios ultraempíricos.

2. Teorías de la medición

La relación entre teoría científica y experimento es un tema vasto y complicado, y parece ser que su análisis preciso es un problema excesivamente difícil. Ha habido una gran cantidad de discusión de este problema en la literatura de la filosofía de la ciencia, pero también ha habido una lamentable ausencia de progreso *sistemático.* Las discusiones de Carnap (1936-37) sobre los *enunciados reductivos* es una

[6] Hasta donde yo sé, la primera (e incluso la última) solución rigurosa de un problema de reducción significativo es el que se encuentra en Adams (1954). El muestra en un sentido apropiado, que la mecánica del sólido rígido es reducible a la mecánica de partículas.

de las contribuciones más substanciales, pero él no intenta un análisis detallado de ninguna rama de la física, y hasta donde yo sé, no existe un análisis tal en la literatura[7]. Cuando se da en forma axiomática una teoría tal como la mecánica clásica de partículas, el problema se reduce a dar una interpretación empírica de las nociones primitivas o de ciertas nociones definidas de la teoría. Ya que en cualquier rama avanzada de la ciencia estamos usualmente interesados en la interpretación de nociones *cuantitativas*, pronto encontramos que es necesaria una teoría sistemática de la medición. La tarea primaria de la teoría de la medición parece ser que consiste en tender un puente en la brecha que hay entre las observaciones cualitativas («esta vara es más larga que aquella», «este plato de la balanza está más alto que aquél») y las aseveraciones cuantitativas demandadas en las teorías científicas desarrolladas («la longitud de esta vara es de 5,6 cms.», «la masa de esta bola de acero es de 7,2 grs.»). En otras palabras, la teoría de la medición debe mostrar cómo podemos pasar legítimamente de la burda región de las cualidades de las rápidas observaciones del sentido común al reino preciso y métrico de la ciencia sistemática. Los métodos conjuntistas más bien que los lingüísticos o metamatemáticos parecen ofrecer las mejores técnicas para hacer esta transición. Ya hay en la literatura (Hoelder [1901], Nagel [1931], von Newman y Morgerstern [1947], pp. 24-29, Hempel [1952], Suppes [1951], Suppes y Winet [1955]) varios conjuntos de axiomas de la medición de diferentes clases. El propósito de esas axiomatizaciones es dar un tipo de álgebra de operaciones y relaciones experimentalmente realizables. Así, al estudiar la medición de la masa, un tipo natural de noción primitiva consiste en dar una relación C de coincidencia tal que xCy si y sólo si cuando el cuerpo x está en un platillo de una balanza y el cuerpo y en el otro, el brazo de la balanza permanecerá en equilibrio horizontal. La tarea formal consiste en demostrar que los axiomas dados para las nociones primitivas en verdad garantizan que la medición en el sentido apropiado está efectuándose si los axiomas son satisfechos[8].

---

[7] La física experimental es más discutida, desde luego, por escritores de los fundamentos de la física, pero no conozco ninguna discusión detallada que proceda con algún grado apreciable de precisión lógica.

[8] Desde un punto de vista matemático, la tarea formal consiste en buscar un teorema de representación en el dominio de los números reales con la representación única de las transformaciones apropiadas (p. ej., transformaciones de similitud para la medición de la masa, transformaciones lineales para la medición de la longitud).

Mi segunda propuesta programática general consiste en que los filósofos de la ciencia hagan suya la tarea de desarrollar axiomatizaciones empíricamente más realistas para varios tipos de medición[9].

Podemos dar un ejemplo para hacer un poco más definido lo que quiero decir por «axiomatizaciones empíricamente realistas». Todo conjunto de axiomas para la medición de la masa supone que la relación de coincidencia mencionada antes es transitiva y, sin embargo, éste no es el caso con ninguna balanza real. Uno podría tomar la actitud de que este axioma de transitividad es una idealización inocente, pero como una cuestión de hecho, esta suposición, junto con una u otras dos de carácter similar, tienen la embarazosa consecuencia de que debe haber un número infinito de objetos distintos cuyas masas deben ser medidas, y quizá aún peor, de que debe haber indefinidamente objetos pesados. Ciertamente, esta consecuencia es difícilmente compatible con los hechos más obvios concernientes a la práctica empírica efectiva de medición de masa.

A pesar de que hay una multitud de problemas bien definidos similares al ejemplo relativo a la transitividad, sólo hay unos cuantos resultados bien definidos esparcidos en la vasta literatura sobre la teoría de la medición. Me parece que hay aquí un extenso campo de cultivo para filósofos con mentalidad científica. Debe admitirse, sin embargo, que no todos los filósofos que han pensado acerca de la teoría de la medición están de acuerdo con la concepción de que la tarea principal es el desarrollo de axiomatizaciones más realistas. Pero en mi opinión, tales filósofos piensan equivocadamente que la axiomatización de los varios tipos de medición es del mismo nivel que la axiomatización de las ramas desarrolladas de la ciencia, tales como la mecánica. En el último caso, la idealización es útil en encarecer enormemente las consecuencias deductivas de la teoría. Pero la teoría de la medición no tiene consecuencias deductivas interesantes correspondientes. Su entera *raison d'être* es dar un análisis metodológico preciso de las prácticas empíricas de medición, y en el grado en que la teoría se desvía toscamente de lo que es factible empíricamente, seguramente es deficiente.

Si el espacio lo permitiera, habría dedicado una tercera sección a

---

[9] Las axiomatizaciones que se adecuan a los hechos fácticos mejor que las ahora disponibles tienen implicaciones interesantes para la epistemología así como para la filosofía de la ciencia. (Cfr. Goodman [1951], cap. X), pero esas conexiones no pueden ser desarrolladas aquí.

la aplicación de los métodos conjuntistas a la teoría de la probabilidad y a la inducción. Aunque se han obtenido resultados interesantes en este dominio por filósofos usando el enfoque lingüístico (por ejemplo, Carnap (1950)), parece haber, al menos, tanta potencia en el enfoque conjuntista. Ciertamente el último puede resultar mucho más rápido para asir las concepciones que dominan la estadística moderna (véase, por ejemplo, Wald [1950] y Blackwell y Grischick [1954]).

Capítulo 3

EL METODO AXIOMATICO EN LAS CIENCIAS EMPIRICAS*

1. Introducción

Mi intención original era dar una plática primariamente sobre la teoría de los modelos aplicada a la teoría de la medición en las ciencias empíricas. Conversaciones con Tarski previas al Simposio cambiaron mi idea. Acordamos que sería deseable hacer un estudio, aun cuando superficial, del lugar que ocupan el método axiomático y la teoría de modelos en las ciencias empíricas. Y así mi propósito presente es hacer un intento de tal estudio. Reconozco las dificultades que el tema entraña y consecuentemente pido disculpas por adelantado. El estudio será necesariamente idiosincrásico, restringido a los temas sobre los cuales tengo algún conocimiento. Comenzaré con la medición, continuaré con la física y finalizaré con el lenguaje natural. En todo momento trataré de enfatizar problemas abiertos.

Sin embargo, antes de comenzar quiero hacer constar mi propia

---

* Publicado originalmente en los *Proceedings of the Tarski Symposium. Proceedings of Simposia in Pure Mathematics* 25, editado por L. Henkin *et al*, American Mathematical Society, Providence R. I., 1974, pp. 465-479. Versión castellana de Arturo Lemus Martínez.

deuda intelectual con Alfred Tarski, tanto directa como indirecta. Poco después de llegar a Stanford en 1950, comencé a asistir al seminario de Tarski en Berkeley. En 1951, J. C. C. McKinsey se incorporó a la Facultad de Stanford y en 1952 impartí un curso de filosofía de la ciencia en Berkeley, en el que estaban inscritos como estudiantes de pregrado Richard Montague y Dana Scott. Los años de estrecho contacto con McKinsey y Scott han sido de un significado permanente para mí y es justo decir que ambos fueron influenciados por Tarski probablemente más que por cualquier otra persona. Cuando McKinsey y yo pensamos por primera vez en trabajar en los fundamentos axiomáticos de la física en 1951, discutimos nuestros planes y líneas de ataque con Tarski en más de una ocasión, su apoyo y favorables consejos fueron importantes para nosotros. Es un placer, en esta ocasión tan apropiada, hacer patente mi deuda con Alfred Tarski así como manifestar el valor que le otorgo a la amistad que durante tantos años llevamos.

2. Medición

La teoría de la medición proporciona algunos de los ejemplos más simples y claros del método axiomático en las ciencias empíricas. Además, la tradición axiomática es muy vieja en la teoría de la medición. Puede considerarse que gran parte de la geometría griega antigua pertenece propiamente a la teoría de la medición y lo que muchos pretenderían que es el primer tratado de física matemática, el tratado de Arquímedes *On the Equilibrium of Planes*, es, en el Libro 1, primariamente un análisis axiomático de la medición conjunta en el caso de pesos en equilibrio con distancias desiguales entre los pesos y el punto de apoyo de la palanca.

Desde un punto de vista lógico, la medición es también una área razonablemente simple de aplicaciones axiomáticas, porque cuando el conjunto básico de objetos a ser medidos es finito, entonces en la mayoría de los casos uno puede axiomatizar completamente la teoría dentro de la lógica ordinaria de primer orden. Por supuesto, una vez que un conjunto infinito es permitido como conjunto básico de objetos, es necesario entonces, para obtener el teorema estándar de representación en términos de números reales, un axioma arquimideano o algún axioma equivalente, lo cual nos lleva más allá de la lógica de primer orden.

Desde un punto de vista matemático hay dos problemas estándar para una teoría de la medición dada. Uno consiste en encontrar un conjunto de axiomas para los cuales puede encontrarse un teorema de representación en los números reales que preserve la estructura en el sentido isomórfico u homomórfico apropiado. El otro consiste en determinar la unicidad de la representación, unicidad en la mayoría de los casos para algún grupo de transformaciones, aunque en ciertos casos el conjunto de transformaciones que preserva la representación no forma un grupo.

Debido a la simplicidad lógica de muchas teorías de la medición es posible obtener algunos resultados matemáticos explícitos. Un ejemplo de tales resultados fue ofrecido en un artículo que publiqué con Scott (1958). Demostramos que la teoría de las diferencias de utilidad preferencial o intensidad psicológica, por ejemplo de un tono, no es axiomatizable por un enunciado universal. Más explícitamente, consideremos un conjunto no vacío A y una relación cuaternaria R sobre dicho conjunto tal que $xyRuv$ si y sólo si la diferencia psicológica subjetiva entre x e y es igual o menor que la que hay entre u y v, tomando la debida cuenta del signo algebraico. Buscamos luego para cualquier estructura relacional $\chi = \langle A, R \rangle$ tal, una función f de valores reales definida sobre A tal que

$$xyRuv \text{ si y sólo si } f(x) - f(y) \leq f(u) - f(v)$$

Lo que Scott y yo demostramos es que un número finito de axiomas universales de primer orden sobre la relación R no puede garantizar la existencia de tal representación. Condiciones necesarias y suficientes, obviamente no finitas ni de primer orden, pueden encontrarse en un artículo de Scott (1964).

Un tratamiento más bien exhaustivo de los fundamentos axiomáticos de muchas partes de la medición se ofrece en un tratado de recién aparición (Krantz *et al* [1971]), pero un buen número de problemas fundamentales permanecen abiertos. Desde un punto de vista conceptual, tal vez lo más interesante es el problema de caracterizar satisfactoriamente de una manera elemental la teoría de un procedimiento de medición y simultáneamente la teoría de sus errores. La teoría del error de la medición ha ocupado a algunos de los más hábiles matemáticos del pasado. Menciono, por ejemplo, a Laplace y a Gauss. Pero el punto de vista axiomático moderno no ha sido aún aplicado con todo cuidado a la fundamentación conceptual de la teo-

ría. La primera tarea debería ser la caracterización, probablemente en términos cualitativos, de las varias distribuciones de probabilidad clásicas estrechamente asociadas con la teoría del error. Yo he hecho esto para la distribución geométrica en un artículo reciente (Suppes [1973a]), pero es solamente un primer paso. El caso más importante es, desde luego, el de la distribución normal multivariable, y una investigación completa de sus fundamentos axiomáticos cualitativos, hasta donde tengo conocimiento, aún no existe.

3. Fuerzas en física clásica

Hace veinte años que McKinsey y yo comenzamos a trabajar sobre la fundamentación axiomática de la física. Recuerdo bien la discusión que teníamos con el editor del *Journal of Rational Mechanics*, el irreprensible Clifford Trusdell, quien estaba disgustado con el análisis de las fuerzas dado en nuestra axiomatización original (McKinsey *et al* [1953]). Trusdell sentía que nuestra caracterización de las fuerzas como triples ordenados de números reales que satisfacen la obvia ley de la adición para tales vectores, no proporcionaba ninguna profundidad conceptual que penetrara la naturaleza física de las fuerzas. En este juicio creo que tenía razón, pero ello no quiere decir que nuestra axiomatización fuera errónea. El primer problema en que inicialmente trabajamos fue el de obtener un conjunto de axiomas que fueran suficientes para caracterizar lo que ordinariamente se considera en física como la mecánica clásica de partículas, y hacerlo de una manera que fuera lógica y matemáticamente aceptable. Hablando a grandes rasgos, esto significa que los axiomas dados eran matemáticamente autocontenidos, sin ninguna suposición sobre la naturaleza matemática de los objetos considerados como implícitos, como es frecuente en el caso de la clase de axiomas establecidos por los físicos.

Lo que falta y es necesario en el análisis de las fuerzas es un tipo de análisis explícito en términos de primitivas elementales. Claramente, las nociones primitivas que McKinsey, Sugar y yo usamos eran complicadas y en los axiomas estaba ya puesto un aparato matemático sustancial. Los axiomas no eran simples en la manera en que los conceptos y axiomas de la geometría lo son. Lo que se requiere es un análisis del concepto de fuerza en el estilo del clásico artículo de Tarski *What is elementary geometry?* (Tarski 1959).

Un interesante análisis reciente, principalmente restringido al caso especial de fuerzas estáticas, ha sido dado por Krantz (en un artículo por aparecer). Su concepto central es el de una estructura en equilibrio $\langle A, E, \oplus, * \rangle$, donde A es un conjunto no vacío de configuraciones (una configuración determina el movimiento de un objeto material dado), E es el subconjunto de configuraciones que no producen cambio en el momentum, $\oplus$ es una operación binaria en A que intuitivamente corresponde a la concatenación de dos configuraciones y $*$ es una operación binaria de $R^+ \times A$ a A, donde R^+ es el conjunto de los números reales positivos. En el caso de una fuerza uniforme, el aparato consiste en una mesa con un timbre pequeño colocado en torno a un poste central, cordones atados al timbre y poleas fijas con pesos suspendidos de los cordones orientadas hacia el borde de la mesa; el significado de la operación r^* es claro: todos los pesos son multiplicados por el número real positivo r. El primer axioma de Krantz es que $\langle A, \oplus \rangle$ es un semigrupo conmutativo. Para a, b en A y r, s en R^+, él postula como segundo axioma:

(i) $r * (s * a) = (rs) * a$;
(ii) $r * (a \oplus b) = (r * a) \oplus (r * b)$;
(iii) $(r + s) * a = (r * a) \oplus (r * b)$;
(iv) $1 * a = a$.

Los dos axiomas restantes son axiomas de superposición y equilibrio. Es claro de los axiomas que he establecido que la formulación de Krantz es muy cercana al enfoque de un vector espacial. Su análisis es ciertamente un perfeccionamiento conceptual sobre el anterior ofrecido en McKinsey *et al* (1953).

El sobresaliente trabajo de Walter Noll (1959) debería también mencionarse, pero sus axiomas sobre el concepto de fuerzas actuando sobre cuerpos requiere un aparato matemático altamente sofisticado y elaborado. Nosotros estamos todavía con el problema de dar, aun para situaciones grandemente simplificadas, una axiomatización elemental para el concepto de fuerza. Proporcionar tal axiomatización me parece uno de los problemas más interesantes que permanecen abiertos en la formulación axiomática de la mecánica clásica. (Enfatizo que hablo aquí de los fundamentos *axiomáticos;* es bien sabido que un gran número de problemas matemáticos permanecen abiertos

en la física clásica. Una buena aproximación en profundidad matemática se encuentra en el trabajo sobre la fundamentación de la mecánica de Abraham (1967)).

4. Relatividad

Dado el número increíblemente grande de trabajos que han sido escritos sobre los fundamentos axiomáticos de la geometría euclideana así como geometrías proyectivas y afines estrechamente relacionadas, es difícil entender por qué una caracterización geométrica de las fuerzas no ha sido el centro de más estudios. Es aún más difícil entender por qué la caracterización geométrica de la multiplicidad espacio-temporal de la relatividad especial, la cual es muy cercana en carácter a la geometría euclidiana, no ha sido objeto de una investigación axiomática.

Aunque han sido varias las investigaciones axiomáticas de la multiplicidad asumida en relatividad general, restringiré mi discusión a la relatividad especial, porque los problemas axiomáticos son más cercanos a investigaciones en fundamentación y el contacto con la teoría lógica de modelos es bastante directo. En el caso de la relatividad general, se suponen herramientas matemáticas mucho más ricas y consecuentemente, tales conexiones son más remotas e indirectas. Algunos excelentes estudios recientes sobre fundamentos axiomáticos de la relatividad general se encuentran en Hudgin (1972) y Latzer (1972).

La más amplia y en muchos respectos la más profunda de las investigaciones cualitativas de los fundamentos axiomáticos de la relatividad especial es aún la que se encuentra en el trabajo de Alfred A. Robb. El publicó sus primeros resultados en 1911 y escribió un libro sobre la teoría del tiempo y el espacio en 1914 (una segunda edición apareció en 1936 [Robb 1936]). Desde el punto de vista de la fundamentación, el trabajo axiomático de Robb es especialmente interesante, porque usa únicamente la relación binaria de *estar después de* entre dos puntos del espacio-tiempo. La adecuación de este único concepto primitivo es sorprendente a la luz de los resultados matemáticos generales obtenidos por Tarski hace muchos años, en el sentido de que ninguna relación binaria no trivial puede ser definida en la geometría euclidiana (1934/1935). La idea intuitiva del enfoque de

Robb es simple y natural. Un punto en el espacio-tiempo está después de otro si el primero está delante del cono de luz del segundo. En otros términos, esto quiere decir que los dos puntos están conectados por una posible trayectoria inercial de una partícula. Robb trabajó en completo detalle la geometría de esta relación de orden parcial. Por supuesto, dos puntos que están espacialmente conectados en la terminología usual de la relatividad especial no pueden estar relacionados por la relación *después*. Robb desarrolló la teoría completa, bajo el espíritu del libro de Forder sobre los fundamentos de la geometría euclidiana (1927). Esto no quiere decir que estoy sugiriendo que Robb fue necesariamente influido por Forder, pero ambos escribieron bajo el mismo espíritu geométrico y compartieron los mismos defectos de exposición y formulación.

El desarrollo de la teoría de Robb es en varios respectos insatisfactorio. Primero, los axiomas son de carácter complejo. Parece evidente que Robb formuló los axiomas en la medida en que los fue necesitando en el desarrollo deductivo de la teoría, pero no intentó después una simplificación y reducción seria de su número. Segundo, no se demuestra ningún teorema de representación explícito, aunque es evidente que esto puede hacerse a partir de los resultados que Robb demuestra y *a fortiori*, no se demuestra ningún teorema sobre la unicidad de la representación.

El teorema de unicidad fue demostrado de manera independiente y separada mucho tiempo después por Zeeman (1964) en un hermoso trabajo que muestra que la primitiva de Robb es adecuada para la derivación de las transformaciones de Lorentz. Si el programa del *Erlanger Klein* hubiera sido llevado a la teoría de la relatividad especial, los resultados de Zeeman hubieran sido demostrados esencialmente al mismo tiempo que los de Robb. Es un reflejo del estado primitivo de discusiones axiomáticas de la relatividad especial que tal laguna exista entre ambos; de hecho, los resultados de Zeeman fueron demostrados, creo, independientemente del conocimiento de los primeros trabajos de Robb.

Una buena discusión de la axiomatización de Robb puede encontrarse en Domotor (1972) y una aproximación alternativa en términos de una relación binaria simétrica de señalamiento en Latzer (1972). Sin embargo, aún necesitamos la clase de fundamentos e investigación matemática de la geometría de la relatividad especial ejemplificada de manera tan acertada en la geometría euclideana por el clásico artículo de Tarski. No tenemos una formulación en axiomas de

primer orden para la geometría de la relatividad especial y parece que no hay todavía resultados matemáticos de cualquier tipo en la literatura.

5. Mecánica cuántica clásica

Una visión superficial de la mecánica cuántica, incluso mecánica cuántica clásica, parece presentar una serie desatinada de problemas, soluciones especiales y técnicas que tiene pocas esperanzas de ser ordenada desde el punto de vista de los fundamentos axiomáticos. Donde han sido realizados estudios matemáticos detallados de partes especiales de la mecánica cuántica, parecería que el aparato funcional moderno es lo suficientemente esencial y poderoso como para hacer imposible mirar cualquier problema significativo en mecánica cuántica desde un punto de vista genuinamente fundamentacional, e. g., desde el punto de vista de que las cuestiones matemáticas de cualquier tipo pueden ser contestadas.

No creo que ésta sea una imagen verdadera. Creo que es posible abstraer varias piezas de la subestructura de la mecánica cuántica y preguntar cuestiones axiomáticas, de interés sobre estas subestructuras. En realidad, la mayoría de los lectores pensarán inmediatamente en las aplicaciones de las lógicas polivalentes a la mecánica cuántica y tal vez estarán familiarizados con las primeras discusiones de Reichenbach (1944), los trabajos más recientes de Kochen y Specker (1965) y los trabajos matemáticamente más orientados de Varadarajan (1968) y (1962). También yo he tratado de decir algo acerca de la necesidad de una lógica no clásica para la mecánica cuántica (1966).

Me gustaría dar por sentado que parece haber algunos problemas abiertos interesantes que son susceptibles de ser abordados lógicamente y además relacionar algunos resultados cualitativos que se encuentran en Krantz *et al* (1971). Para excluir distribuciones de probabilidad conjunta de observables conjugados, podemos en el espíritu de las σ—álgebras ordinarias caracterizar σ —álgebras mecánico-cuánticas bajo la condición de que tal álgebra sea una familia de conjuntos no vacía cerrada bajo el complemento y uniones denumerables de pares de conjuntos disjuntos.

Para ver la lógica de la situación debemos considerar solamente álgebras de conjuntos que son cerradas bajo el complemento y la unión (finita) de conjuntos disjuntos. Una pregunta aún abierta en

este tipo de literatura es la caracterización de la lógica de enunciados cuyas fórmulas válidas son precisamente aquellas que son válidas en tales álgebras mecánico-cuánticas.

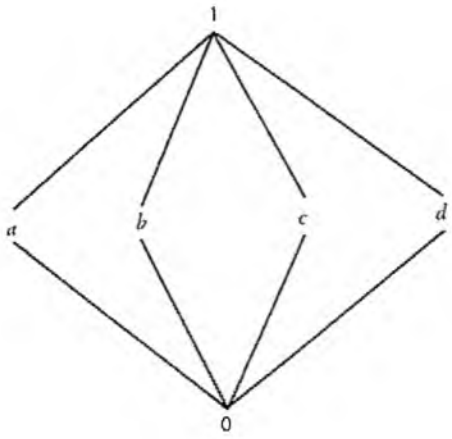
Podemos también proceder en una forma más abstracta y considerar órdenes parciales ortocomplementados. Los axiomas son incorporados en la siguiente definición. En esta definición se entiende que A es un conjunto no vacío, $\leq$ es una relación binaria sobre A; esta relación es el análogo abstracto de la inclusión de conjuntos. La operación unaria $'$ es el análogo abstracto del complemento de conjuntos y 1 es un elemento de A, donde este elemento es el análogo abstracto de un espacio de muestra X en un álgebra de conjuntos mecánico-cuántica.

Definición. Una estructura $\chi = \langle A, \leq, ', 1 \rangle$ es un *álgebra mecánico-cuántica* si y sólo si los siguientes axiomas son satisfechos para todo a, b, c en A:

(1) $a \leq a$;
(2) si $a \leq b$ y $b \leq a$ entonces $a = b$;
(3) si $a \leq b$ y $b \leq c$ entonces $a \leq c$;
(4) si $a \leq b$ entonces $b' \leq a'$;
(5) $(a')' = a$;
(6) $a \leq 1$;
(7) si $a \leq b$ y $a' \leq b$ entonces $b = 1$;
(8) si $a \leq b'$ entonces existe una c en A tal que $a \leq c$, $b \leq c$, y para toda d en A si $a \leq d$ y $b \leq d$ entonces $c \leq d$;
(9) si $a \leq b$ entonces hay una c en A tal que $c \leq a'$, $c \leq b$ y para toda d en A si $a \leq d$ y $c \leq d$ entonces $b \leq d$.

Esta definición puede ser fácilmente extendida a una σ —álgebra mecánico-cuántica, y es también fácil demostrar que toda álgebra de conjuntos mecánico-cuántica definida como arriba es una álgebra mecánico-cuántica en el sentido de esta definición.

Por otro lado, Bjarni Jónsson me dio el siguiente simple contraejemplo para mostrar que no toda álgebra mecánico-cuántica es isomórfica a una álgebra de conjuntos mecánico-cuántica (son conocidos ejemplos complicados en términos de subespacios del espacio de Hilbert, pero la virtud de este ejemplo es su carácter elemental). El contraejemplo es el siguiente retículo.



$a' = b, b' = a,$
donde $c' = d, d' = c,$
$0' = 1, 1' = 0.$

Dada la diferencia elemental entre álgebras mecánico-cuánticas y álgebras de conjuntos mecánico-cuánticas, sería también interesante tener una axiomatización de la lógica de enunciados cuyos enunciados válidos valen en toda álgebra mecánico-cuántica. Aunque puede decirse más acerca de esos problemas, debo ir a algunos problemas estrechamente conectados.

Otro enfoque en la misma línea cualitativa es la caracterización de la estructura probabilista impuesta sobre tales álgebras. Por una razón, podemos preguntar por una axiomatización cualitativa de probabilidad para las álgebras de conjuntos mecánico-cuánticas correspondiente al problema clásico de Finetti para álgebras de conjuntos ordinarias. La mayor parte de la teoría cualitativa clásica está demostrada en Krantz *et al* (1971), capítulo 5, por lo tanto no repetiré esos detalles aquí pero esto proporciona una teoría cualitativa elemental de probabilidad mecánico-cuántica, donde ***probabilidad mecánico-cuántica*** significa una medida probable y no necesariamente definida para la unión o la intersección de sucesos arbitrarios en el álgebra de eventos.

Desde un punto de vista mecánico-cuántico, sin embargo, el desarrollo de la teoría cualitativa de probabilidad es meramente un fragmento y son necesarios axiomas cualitativos adicionales para alcanzar cualquier cuestión genuinamente mecánico-cuántica. No parece carecer de esperanzas proceder en el mismo estilo para obtener axiomas cualitativos, al menos para casos simples, y parecería ser un problema digno de ser estudiado para ver que tan lejos puede ser segui-

do un enfoque cualitativo para la fundamentación de la mecánica-cuántica. Podría estar equivocado, pero pienso que uno puede seguir completamente un camino con casos tan simples como los osciladores armónicos lineales en una dimensión. Saber exactamente hasta donde tal enfoque cualitativo puede ser proseguido, puede proporcionar alguna comprensión interesante dentro de la estructura de la mecánica-cuántica.

Completamente aparte de las subestructuras relativamente simples de la mecánica cuántica clásica, allí permanece el problema abierto de construir en forma conjuntista propia una formulación axiomática completamente adecuada, que puede inicialmente establecerse en términos de nociones matemáticas complicadas, pero que debe ser adecuada tanto a los conceptos fundamentales como a las aplicaciones estándares. Creo que hasta ahora ninguna formulación tal en forma satisfactoria existe. Muchos aspectos parciales de la teoría más compleja, incluyendo caracterizaciones abstractas de la teoría del espacio de Hilbert de observables y operadores, han sido intensamente estudiados, pero lo que parecería en la superficie ser una cuestión elemental, el establecer una teoría constructiva para la relación entre observables particulares y operadores particulares, un paso necesario en cualquier teoría adecuada a las aplicaciones, no parece haber sido investigada en una manera axiomática explícita. El axioma estándar de que hay una correspondencia uno a uno entre observables y operadores autojuntables de un espacio de Hilbert complejo, separable, infinitamente dimensional, por ejemplo, está lejos de proveer cualquier cosa parecida a la necesitada formulación constructiva.

6. Teoría de la conducta estímulo-respuesta

No quiero dar la impresión de que la aplicación de métodos axiomáticos en las ciencias empíricas está principalmente restringida a las ciencias físicas. Muchos problemas de interés en el comportamiento y en las ciencias sociales han sido también tratados desde un punto de vista axiomático. Gran parte del trabajo contemporáneo en economía matemática satisface un estándar alto de axiomatización y cuando no está explícitamente establecido así, puede ser fácilmente puesto dentro de un marco conjuntista estándar sin dificultad. Por otro lado, con la excepción de algunos de los problemas de medición mencionados antes, el impacto de la teoría de modelos como ha sido

desarrollada en lógica y la clase de cuestiones matemáticas características de esta teoría no han sido ampliamente aplicados en las ciencias sociales y la relación de estas ciencias con cuestiones fundamentales de lógica no han tenido los antecedentes de investigación característicos de los problemas de larga estancia en física.

La clase de teoría psicológica que quiero discutir en esta sección representa una área en la que personalmente trabajé por diez años y medio. Pido disculpas por el énfasis egocéntrico, pero creo que hay un punto útil a ser elaborado para considerar esta teoría particular. Teorías de la conducta de la clase mencionada, son en su formulación axiomática completamente incrustables en la teoría de la probabilidad. El uso explícito de la teoría de la probabilidad estándar prohíbe en ocasiones toda posibilidad de una formulación natural de primer orden. Aún pensando en mecánica cuántica podría ser digno de tener en cuenta intentar una formulación cualitativa elemental para investigar los fundamentos más cabalmente; en el presente estado de desarrollo de la teoría axiomática de la conducta, no parece ser ya de mérito llevar a cabo tal investigación a causa de los desarrollos teóricos comparativamente superficiales hasta aquí obtenidos. En contraste, la mecánica cuántica clásica ofrece algo cuyo gran valor es permanente; a pesar del hecho de ser conocido, no es empíricamente correcto para dominios significativos de fenómenos físicos.

Una vez que se supone un aparato probabilista y se postula un proceso razonablemente complejo, los axiomas asumen inevitablemente un carácter remotamente lejano al de las elegantes formulaciones características de las teorías de primer orden que han recibido una investigación considerable por parte de los lógicos, y que han jugado un papel central en el desarrollo de la teoría de modelos.

A causa de las complicadas estructuras matemáticas involucradas, no es realmente factible buscar resultados metamatemáticos sobre estas teorías de la conducta. Sin embargo, existe ya una tendencia en la teoría de modelos dentro de la lógica que puede ser usada para adelantar también en este terreno. Por algún buen tiempo un esfuerzo definido ha sido realizado por Tarski y sus colaboradores para demostrar resultados establecidos por métodos metamatemáticos por argumentos puramente matemáticos y estudiar con algún cuidado los problemas involucrados para llevar a cabo la transición. En el caso de teorías axiomáticas de la conducta, hay pocos problemas de gran profundidad. Los problemas reales aún están centrados en la formulación propia de las teorías mismas. Creo que aquí se puede aprender

una lección de la teoría de modelos. La gran explicitud y claridad del trabajo contemporáneo en la teoría de modelos puede proporcionar una guía para la formulación en términos matemáticos explícitos de teorías de la conducta.

Podría parecer que si las teorías fueran a ser usadas principalmente para comprobar directamente resultados experimentales claros, no habría necesidad de formular las teorías en forma axiomática explícita y, consecuentemente, no habría ninguna lección real que aprender de los métodos de la teoría de modelos. Cualquiera que pudiera ser la situación, no es la que se obtiene. Existe una gran controversia conceptual acerca del poder intelectual de varias teorías para explicar diferentes categorías de conducta. Una aserción estándar en psicolingüística, por ejemplo, es que las teorías estímulo-respuesta posiblemente no pueden explicar la complejidad y sutileza del aprendizaje y la conducta del lenguaje. Las dificultades con estas visiones negativas de la teoría estímulo-respuesta es que ellas tienen más bien el estatus de dogmas negativos que imposibilitan los teoremas. Para convertir estos dogmas negativos en conocimiento teórico genuino sobre el poder o las limitaciones de poder de las teorías, debemos probar un teorema de imposibilidad de la clase familiar en muchos dominios de las matemáticas, pero especialmente en los fundamentos de las matemáticas.

Particularmente para teorías de la conducta y del aprendizaje del lenguaje hay una sutil y más íntima conexión con el trabajo contemporáneo en lógica matemática debido a la conexión entre varios tipos de lenguaje, regular, libres de contexto, sensibles al contexto, etc. Y varios tipos de máquinas abstractas. En otras palabras, las formulaciones axiomáticas de las teorías de la conducta pueden ellas mismas reflejarse hacia su propia lógica para dar un nuevo y diferente punto de vista de cómo la lógica y el lenguaje pueden ser aprendidos y cómo tienen lugar la conducta lingüística y el pensamiento matemático.

Establecido a este nivel de generalidad, veo demasiado ambicioso, y ciertamente irrealista, para las teorías del comportamiento en términos de las presentes realizaciones. Mi intención, sin embargo, es ofrecer una perspectiva sobre lo que debe ser intentado, y no sobre lo que ha sido realizado.

He tomado algunos de mis propios pequeños pasos en esta dirección. En Suppes (1969b) formulé una versión de la teoría estímulo-respuesta y mostré que dado cualquier autómata finito conectado hay un modelo estímulo-respuesta que es asintótico, i. e., como el nú-

mero de triadas de aprendizaje va al infinito, es isomórfico en el sentido apropiado a un autómata finito. Sobre simples suposiciones idealizadas sobre la memoria humana no es difícil extender estos resultados a máquinas abstractas más poderosas. El problema conceptualmente más interesante consiste en analizar los mecanismos de reforzamiento que produce el aprendizaje requerido para el isomorfismo como asintótico. El plan de reforzamiento que usé en el teorema demostrado es demasiado simple y directo como para tomarlo en cuenta en mucho del aprendizaje humano, especialmente el aprendizaje del lenguaje. En la tesis de Rottmayer (1970) se muestra que un plan de reforzamiento considerablemente más débil es también adecuado para obtener esencialmente el mismo resultado. Un aspecto interesante del resultado de Rottmayer, que podría ser anticipado, es que ya no vale un isomorfismo del estado interno, debido a la debilidad del esquema de reforzamiento, que simplemente informa del mecanismo de aprendizaje sea éste correcto o no después de cada respuesta externalizada. El estado interno del modelo de aprendizaje no resulta asintóticamente isomórfico al autómata dado, pero un isomorfismo conductual es alcanzable.

Para aplicaciones experimentales y prácticas esos resultados asintóticos requieren ser reemplazados por análisis mucho más detallados de la tasa de aprendizaje. Actualmente, sin embargo, parece demasiado difícil computar la prueba esperada del último error u otra cantidad relacionada. Además, estimaciones burdas de tales cantidades indican que el aprendizaje es demasiado lento, y que se requieren avances ulteriores en la teoría.

7. Semántica de lenguajes naturales

Si observamos el enfoque de las máquinas abstractas del lenguaje y su relación con las definiciones corrientes de los lenguajes formales, por ejemplo, lenguajes libres de contexto o sensibles al contexto, es patente que la ausencia más evidente es una seria explicación de la semántica de esos lenguajes. Este es el tópico final al cual regresaré.

Aunque este trabajo es sólo un comienzo, es mi predicción que los numerosos resultados que son consecuencia de la teoría de modelos, muchos de los cuales provienen del trabajo de Tarski de los años treinta sobre la semántica de los lenguajes formalizados, será en

el futuro de igual importancia en el análisis de los lenguajes naturales. Antes de su inesperada muerte, el antes discípulo de Tarski, el último Richard Montague, había dado ya importantes pasos en esta dirección (Montague [1970]).

Me gustaría bosquejar mi propia aproximación a estos problemas y ofrecer suficientes detalles de algunos de los ejemplos de modo tal que esa familiaridad con la teoría de modelos en lógica se sentirá inmediatamente como en casa con los conceptos usados para el análisis de los lenguajes naturales. Las definiciones son formales y aplicables a cualquier lenguaje libre de contexto; en verdad son fácilmente generalizables a lenguajes más ricos, y quiero enfatizar que el aparato usado por mis colaboradores y yo es aplicable al análisis de los lenguajes naturales. En este respecto nuestro uso de la semántica es como el uso de las matemáticas en física. Estamos aplicándola a datos empíricos y estamos interesados en poner a prueba ideas teóricas dentro de una metodología científica estándar para la comprobación de teorías científicas, incluyendo, cuando la ocasión es apropiada, un análisis estadístico completo de la bondad de la adecuación. Predigo que la semántica modelística, tan asociada al trabajo de Tarski, probará ser una de las herramientas más importantes en el estudio científico y empírico de los lenguajes naturales, una vez que lingüistas y psicólogos alcancen un entendimiento más profundo y una apreciación mejor de los métodos de la teoría de modelos.

Sin dar un conjunto completo de definiciones formales, trataré de establecer el carácter intuitivo de mis propias ideas y dar algunos ejemplos concretos. Comienzo con la noción de estructura gramátical de frase desarrollada por Chomsky y otros. Desde un punto de vista formal, una estructura $G = \langle V, V_N, P, S \rangle$ es una *estructura gramatical de frase* si y sólo si V y P son conjuntos finitos, no vacíos, V_N es un subconjunto de V, S está en V_N y $P \subseteq V_N^* \times V^+$, donde V_N^* es el conjunto de frecuencias finitas de elementos de V_N, y V^+ es el conjunto de tales secuencias de V, excluyendo al conjunto vacío. Siguiendo la terminología usual, V_N es el conjunto del vocabulario no terminal y $V_T = V - V_N$ el vocabulario terminal. El símbolo inicial es S o el único axioma del cual derivamos cadenas o palabras en el lenguaje generado por G. El conjunto P es el conjunto de reglas de producción o reescripción. Si $\langle \alpha, \beta \rangle \in P$, escribimos $\alpha \rightarrow \beta$, y leemos: de α podemos producir o derivar β (inmediatamente). Más aún, una estructura gramatical de frase $G = \langle V, V_N, P, S \rangle$ es *libre de con-*

texto y sólo si $P \subseteq V_N \times V^+$, i.e., si $\alpha \rightarrow \beta$ está en P, entonces $\alpha \in V_N$ y $\beta \in V^+$[1].

Enseguida necesitamos definir árboles de derivación para gramáticas libres de contexto. Cada árbol está ordenado de izquierda a derecha de manera intuitiva, para conseguir una lectura de izquierda a derecha de una cadena terminal, y cada nudo tiene una etiqueta. Las hojas tienen etiquetas terminales y los otros nudos tienen etiquetas no terminales. Vamos a hacer de esto un *árbol semántico* —y aquí es donde entra la semántica modelística— exigiendo también que cada nudo del árbol tenga una denotación. Comenzamos requiriendo en el caso simple que cada palabra terminal tenga una denotación y en los casos más complejos y sutiles que dada una frase terminal que denote sin que sus subpartes denoten. Conseguimos la denotación de otros nudos del árbol por recursión. Las reglas de recursión se obtienen asignando a cada regla de producción de la gramática una función conjuntista que nos permite computar, por así decirlo, la denotación del lado izquierdo de una regla de producción conociendo las denotaciones de los miembros del lado derecho de la regla. Por ejemplo, si tenemos la regla de reescritura

$$\text{FN} \rightarrow \text{FN} + \text{Adj}$$

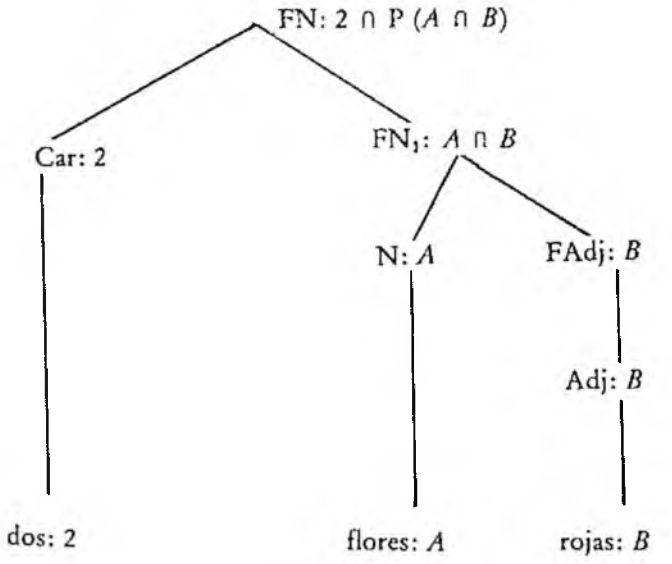
la función conjuntista que asignamos a esta regla en el caso simple es la intersección. Las funciones conjuntistas asignadas a las reglas de producción juegan el papel de una definición recursiva de verdad en la caracterización de Tarski de la verdad para los lenguajes formales.

Finalmente, para obtener el modelo teórico ordinario, se requiere que todas las denotaciones yazcan en una jerarquía de conjuntos construida a partir de un dominio no vacío. Para los usos del lenguaje natural una jerarquía suficientemente rica parece ser una que es cerrada bajo unión de conjuntos, la operación de conjunto potencia y la formación de subconjuntos. Los detalles técnicos están contenidos en Suppes (1973b).

---

[1] Para hacer las gramáticas libres de contexto un caso especial de las estructuras gramaticales de frase, tal y como son definidas aquí, los primeros miembros de P no deben ser miembros de V_N, sino secuencias de un lugar cuyos términos son elementos de V_N. El mismo problema surge en referencia a los elementos de V^*, pero considérense los elementos de V como perteneciendo a V^*. Consecuentemente, para evitar complejidades notacionales, trataré a los elementos, sus conjuntos unidades y secuencias de un lugar cuyos términos son los elementos como idénticos.

Ahora me gustaría ir a algunos ejemplos extraídos del habla infantil para ilustrar cómo esas ideas se aplican empíricamente. Me restringiré a un ejemplo simple de la frase nominal *dos flores rojas* y sus equivalencias aproximativas en francés y chino. Para la semántica, uso el concepto de Frege y Russell de número cardinal: dos es precisamente el conjunto de todos los conjuntos pares, y para evitar cualquier paradoja, podemos considerar solamente miembros de conjuntos a una cierta distancia de arriba de la jerarquía de conjuntos. Uso la notación estándar para el conjunto potencia, así P(A) es el conjunto de todos los subconjuntos de A. Para símbolos no terminales en el árbol tenemos: FN para frase nominal, Car para el nombre de un número cardinal, FAdj para frase adjetiva, Adj para adjetivo y N para nombre. Sean también B el conjunto de las cosas rojas y A el conjunto de las flores. La denotación de cada nudo se muestra después de los dos puntos que siguen la etiqueta del nudo. Entonces el árbol se asemeja a esto:

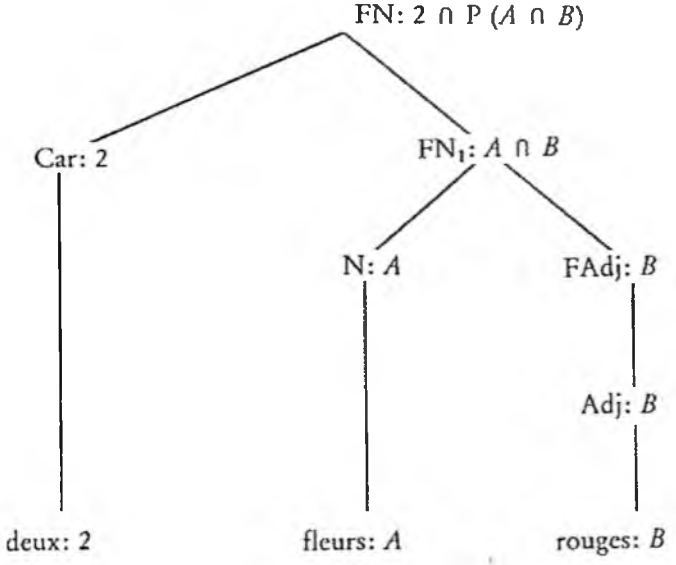


La gramática parcial exhibida en este árbol puede escribirse en la siguiente forma:

$$FN \rightarrow Car + FN_1, \qquad FN_1 \rightarrow N + FAdj,$$
$$FAdj \rightarrow FAdj + Adj, \qquad FAdj \rightarrow Adj.$$

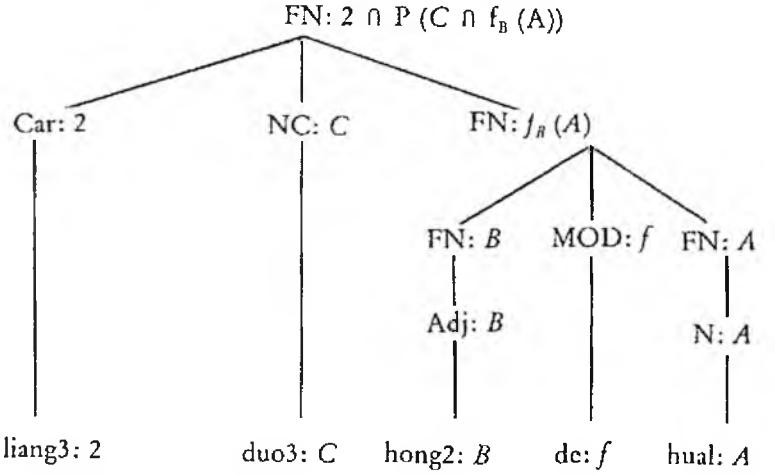
Es claro a partir del árbol cuál es la función semántica para cada regla. Por ejemplo, para la tercera regla, la función semántica es la intersección. Tanto en el árbol como en la gramática he usado el subscrito «1» sobre «FN» para imponer una restricción que bloquea la recursión de los nombres de números cardinales. Al nivel elemental ciertamente no queremos frases como *dos cuatro flores rojas*.

La frase francesa correspondiente a *dos flores rojas* es *deux fleurs rouges*, aunque es menos frecuente en el frances omitir el artículo definido que en el español (*inglés* en el original). El árbol semántico es el mismo que el anterior excepto por la reflexión natural izquierda-derecha en la parte del árbol que ocurre para ajustar la posición superficial de los adjetivos en francés*.



* En el inglés, a diferencia del español y el francés, los adjetivos preceden a los nombres. De esta manera, la frase inglesa en cuestión es *two reds roses*, donde «reds» es el adjetivo y «roses» es el nombre. Al traducirle hemos invertido ya el orden por lo que esta observación del autor no viene al caso.

El árbol semántico chino correspondiente incluye un nombre clasificador (NC) y la partícula *de* (MOD) y es más complicado en la superficie que los árboles del inglés o francés, pero la semántica subyacente es similar. En mi modo de ver, la semántica simple del nombre clasificador consiste en denotar la unión de todos los conjuntos de objetos denotados por los nombres que modifican, pero, por supuesto, cuando un NC se usa como un mecanismo de referencia pronominal tiene que decidirse algo diferente. Sobre la suposición simple recién establecida acerca de la unión, el árbol semántico para *liang3 duo3 hong2 de hual* (dos rosas rojas) es:



Para la interpretación semántica de la partícula *de*, f es una función de elección tal que, para cada B, $f_B(A) \subseteq A$ y la función semántica asignada a la regla FN mostrada en el subárbol de la derecha del árbol semántico chino es simplemente una función semántica de tres argumentos que corresponde a esta función de elección, i.e., ψ (B, f, A) = f_B (A).

No estoy sugiriendo que mi aproximación a esas frases simples en español, francés y chino es necesariamente la mejor, o incluso una que se verá correcta en todos los detalles, pero pienso que este enfoque básico es correcto y muestra cuán natural es el uso de la semántica modelística en el análisis de los lenguajes naturales. La determinación precisa de las funciones semánticas asociadas con una

gramática dada de un lenguaje natural, o parte del lenguaje, es un problema empírico. Los métodos empíricos apropiados de investigación no están todavía enteramente desarrollados, pero no veo ningún obstáculo conceptual en el camino.

Finalmente, enfatizo que la aplicación de la semántica modelística no está en ningún sentido restringida a fragmentos libres de contexto del lenguaje natural. Es directa y natural la extensión de los métodos a gramáticas indicadas, que son sensibles al contexto, o una variedad de transformaciones. Por otro lado, es igualmente patente que se requerirán mayores extensiones conceptuales de la semántica modelística para dar una explicación científica completa del uso y el aprendizaje del lenguaje, pero esto es como debe ser y es de esperarse en la evaluación de la adecuación de cualquier teoría que se ocupa de fenómenos empíricos a un nivel fundamental.

Capítulo 4

LA DESEABILIDAD DE LA FORMALIZACION EN CIENCIA*

Sería entretenido considerar la cuestión de si la formalización en ciencia fue deseable para Arquímedes en Sicilia, o unos trescientos años después, para Ptolomeo en Alejandría. Puedo imaginar a Arquímedes, en un modo de hablar característico, diciendo que ningún hombre de eminencia en filosofía preguntaría tal cuestión. Sería como preguntar si alguien quiso una demostración real en geometría como opuesta a un método sugestivo pero informal. Pienso que aun Ptolomeo, aunque mucho más profundamente envuelto en observaciones empíricas y en el complicado problema de conformar la teoría con los datos, contestaría en la misma vena. En otras palabras, quiero aseverar que las únicas ramas de la ciencia cuantitativa seriamente desarrolladas en la antigüedad fueron consideradas como extensiones de la geometría y tratadas con el mismo grado de formalidad. Estoy pensando particularmente en el trabajo de Arquímedes sobre estática; su tratado sobre el equilibrio de planos es el primer tratado sistemático en física matemática. También estoy pensando en el *Almagesto* de Ptolomeo, el cual es incuestionablemente el mayor trabajo

* Publicado originalmente en el *Journal of Philosophy* 65, 1969, pp. 651-664. Versión castellana de Jorge Mojica León.

científico de la antigüedad, si entendemos por ciencia, como opuesta a las matemáticas, el desarrollo de la teoría y la confrontación de la teoría con datos cuantitativos. Para esta antigua tradición de análisis científico, no había ninguna manera adecuada de pensar más que en términos de los métodos formales de la geometría. Este patrón que se origina con Arquímedes tiene una larga y continua historia a través de la tradición árabe y latina de la Edad Media, llegando sin ruptura hasta los *Principia* de Newton en el siglo XVII. Los métodos geométricos formales de Newton y su cuidadosa consideración de los datos están muchísimo en el espíritu del *Almagesto* de Ptolomeo. Para Newton también hay poco lugar para cuestionar la conveniencia de la formalización en ciencia. Aun el más empírico de sus trabajos sistemáticos, la *Optica,* fue organizado de manera geométrica y demostrativa.

Es posible replicar que la formalización hoy significa mucho más que el uso explícito del método geométrico hecho en la antigua Alejandría, en la Universidad de París en el siglo XIII, o en Cambridge en el siglo diecisiete. Pero el punto no es bien tomado, porque seguramente el punto conceptual real es que los estándares de rigor y formalización característicos de los matemáticos del tiempo también se encuentran en la ciencia sistemática.

En los casi tres siglos desde la publicación de los *Principia* de Newton, la divergencia entre el método deductivo usado en matemática y en física ha llegado a ser muy pronunciado. La dirección de las matemáticas ha sido moverse hacia mejores y bien definidos criterios de rigor y formalización. Este no es el caso en física matemática, aunque aun aquí ha surgido una distinción entre física matemática y física teórica. La física matemática es un tópico hecho crecientemente por matemáticos, y su interés por las cuestiones de rigor y claridad formal de las suposiciones es evidente. La física teórica, por el otro lado, es hecha de una manera que está muy lejos de satisfacer los estándares de la matemática moderna. Ninguno de los trabajos históricamente importantes de ese siglo en la teoría de la relatividad o en mecánica cuántica fueron escritos en un estilo matemáticamente formalizado, claramente delineado. (En referencia a la teoría de la relatividad tengo en mente los primeros escritos de Einstein y Lorentz, no el trabajo matemático posterior de Minkowski, Veblen, Robb y otros.) Incluso el libro de Von Neuman sobre mecánica cuántica (1932) no da un desarrollo axiomático, o lo que podríamos llamar arquimediano de la mecánica cuántica, sino solamente del espacio de

Hilbert. Es difícil predecir el futuro de los métodos axiomáticos y formalizados en las ciencias empíricas. Hay señales, por lo menos, que la gran brecha que actualmente separa los métodos usados en física de los usados en matemáticas empieza a cerrarse, y no se ampliará en otras disciplinas empíricas, tales como la economía matemática y la psicología matemática. Pero no es el propósito de este trabajo intentar dar un argumento estrecho de la proyección de estos futuros desarrollos.

Dejando a un lado el argumento positivo de la tradición que empieza con Arquímedes y que incluye a Newton, y también el argumento negativo que señala el bajo nivel de formalización corriente en mucho de la ciencia contemporánea, es todavía pertinente preguntar cuáles son las razones de relevancia filosófica para la formalización de la ciencia. ¿Es deseable la formalización, o en verdad necesaria en algunos casos, para un análisis filosófico adecuado de los conceptos? Una manera de poner un argumento filosófico a favor de la formalización es ésta. El papel de la filosofía en ciencia es clarificar problemas conceptuales y hacer explícitos los supuestos fundamentacionales de cada disciplina científica. La clarificación de problemas conceptuales o la construcción de una fundamentación lógica explícita son tareas que ni son intensamente empíricas ni de carácter matemático. Pueden considerarse como faenas propiamente filosóficas directamente relevantes para la ciencia.

En el contexto de tal clarificación y construcción, un método primario de análisis filosófico es el formalizar y axiomatizar los conceptos y teorías de importancia fundamental en un dominio dado de la ciencia.

Argüir que tal formalización es un método importante de clarificación no es ningún sentido pretender que es el único método de análisis filosófico. Casi todos concordarían en que la crítica penetrante, aunque informal, de ejemplos de formalización juega un papel central en apreciar la corrección intuitiva de una solución a un problema conceptual o a la construcción de una fundamentación explícita. La formalización no responderá todas las cuestiones ni resolverá todos los problemas, aunque se encuentra una lección muy ilustrativa en la filosofía de las matemáticas. Durante los últimos cien años, los métodos de formalización han sido aplicados extensamente a la fundamentación de las matemáticas. Es claro decir que durante ese período ha habido más progreso perceptible en nuestra comprensión de los fundamentos de las matemáticas y en la profundidad de los pro-

blemas que son considerados importantes que en cualquier otra rama de la filosofía. Este trabajo fundamentacional ha tenido consecuencias de gran alcance en la matemática misma. La fundamentación conjuntista de las matemáticas que se inició con Cantor y Frege, y que fue perfeccionada por Zermelo, Russell y otros, es hoy un marco conceptual dentro del cual se escribe la mayoría de la matemática pura.

El sentido de la formalización que usaré en la discusión subsecuente es precisamente ese de una formulación conjuntista estándar. No quiero decir por formalización la concepción más estricta de una teoría de primer orden que asume solamente lógica elemental. Tal formalización más estricta es adecuada para el estudio intensivo de muchos dominios elementales de matemáticas, pero en casi todas las áreas de las ciencias es necesario un rico aparato matemático. Podemos apelar apropiadamente a ese aparato dentro de un marco conjuntista. (No se hará aquí una defensa más elaborada del sentido exacto propuesto de formalización; he defendido el enfoque conjuntista en numerosas ocasiones en el pasado, y mucho de lo que digo aquí sobre asuntos más generales no dependerá en ninguna manera importante del sentido preciso de formalización que se use.)

Hay otras razones por las que la formalización de una teoría científica es deseable. Algo puede decirse, aunque sea brevemente, acerca de ellas.

Explicitud

Formalizar una familia de conceptos conectados es una manera de hacer explícitos sus significados. Un buen ejemplo de lo que puede esperarse en esta dirección es provisto por el concepto de probabilidad. Antes del análisis explícito de la estructura formal de la probabilidad por Kolmogorov (1933), había mucha confusión incluso sobre las propiedades más elementales de la probabilidad, e.g. el dominio de definición de una medida de probabilidad. La corrección intuitiva de la formalización de Kolmogorov fue reconocida casi de inmediato, y ahora es universalmente adoptada. Por otro lado, la formalización no terminó la discusión y el análisis filosófico del concepto de probabilidad. Más bien, ayudó a elevar la discusión a un nuevo nivel. La dificultad con la caracterización puramente conjuntista de Kolmogorov es que el concepto de probabilidad no es suficientemente categórico. Hay posibles interpretaciones de los axiomas que no

corresponden a ninguna intuición acerca de la probabilidad. Una manera de interpretar la vasta literatura reciente sobre los fundamentos de la probabilidad es como un intento de suplementar los axiomas de Kolmogorov para proveer un aceptable y al mismo tiempo más categórico sistema axiomático, para hacer el significado de la probabilidad aún más explícito.

Estandarización

Una de las consecuencias más deseables del uso de un marco conjuntista para la formalización explícita de teorías científicas es la estandarización de la terminología y los métodos de análisis conceptual que serían llevados a diferentes ramas de la ciencia. Es una cuestión empírica, y aunque creo que podría apoyarse en evidencia sistemática, que los estudiantes quienes saben y pueden usar métodos conjuntistas, encuentran más fácil absorver diferentes ramas de la ciencia, todas las cuales están formalizadas en un lenguaje común. Un amplio propósito de la formalización consiste en hacer más fácil la comunicación entre las disciplinas científicas. La unidad de la ciencia que ha sido tan hábilmente defendida por muchos filósofos en este siglo sería mucho más una realidad, si un lenguaje teórico común fuera usado tan ampliamente como fuera posible.

Generalidad

Otra virtud de la formalización es que frecuentemente provee medios de ver el bosque a pesar de los árboles. Quiero decir con esto que la formalización elimina rasgos provinciales del modo en que la teoría científica ha sido pensada. Es fácil dar varios ejemplos de la virtud de la formalización desde este punto de vista. Quizá uno de los más lindos es la demostración de que las dos versiones clásicas de la mecánica cuántica, mecánica ondulatoria y mecánica de matrices, son idénticas, en el sentido de que hay sólo un espacio de Hilbert, salvo isomorfismo, y ambas son realizaciones de tal espacio. En un sentido claro, la controversia acerca de si una mecánica continua de ondas o mecánica discreta de representaciones de matrices debería ser usada para un análisis de fenómenos mecánicos cuánticos se volvió irrelevante por la demostración del isomorfismo.

Objetividad

La formalización provee un grado de objetividad que es imposible en teorías que no están establecidas de tal manera. En áreas de la ciencia donde existe gran controversia incluso acerca de los conceptos más elementales, el valor de tal formalización puede ser substancial. Un ejemplo es la permanente controversia en psicología entre las teorías estímulo-respuesta orientadas conductistamente y teorías cognoscitivas.

Para muchos de los paradigmas experimentales que han sido intensamente estudiados y para los cuales existen extensos cuerpos de datos, es posible mostrar de una manera rigurosa que son isomórficos[1] los modelos de las versiones exactamente formuladas de la teoría estímulo-respuestas y los modelos de estrategias de selección de las teorías cognoscitivas formuladas exactamente.

Suposiciones autocontenidas

La formalización es una manera de separar del bosque de suposiciones implícitas y el matorral circundante de confusión, la base que se requiere para la teoría que es considerada. Los físicos, por ejemplo, son aficionados a desechar sobre «bases físicas» soluciones para ecuaciones fundamentales que encuentran inaceptables. Pero, a menos que las suposiciones requeridas para la eliminación de tales soluciones sean establecidas de antemano, la selección de las soluciones se deja a la intuición intutorada. Es una cuestión adecuada preguntar por qué es filosóficamente interesante formular una teoría en términos de un conjunto de suposiciones autocontenidas, y no quiero sugerir que se puede dar un argumento definitivo acerca de materias tan complejas como ésta. En el fondo, sin embargo, pienso que hay un instinto de artífice de naves que es duro de resistir una vez que se ha desarrollado. No establecer sistemáticamente todas las suposiciones requeridas para una teoría al comienzo de su desarrollo es muy parecido a construir una casa cuya cimentación es continuamente modificada, a medida que se construyen los pisos superiores, porque el análisis estructural de la resistencia estaba equivocado. Ir por supo-

[1] Algunos resultados detallados se encuentran en P. Suppes y Atkinson (1960a) y en Suppes (1969b).

siciones que son autocontenidas es también una manera de asegurar la objetividad científica. Si pueden agregarse informalmente nuevas suposiciones en la medida en que se necesiten, siempre hay duda de si se ha encontrado una explicación genuina de fenómenos empíricos. La adición *ad hoc* de nuevas suposiciones ha sido una práctica especialmente prevaleciente en ciertas áreas de la psicología y la sociología, pero afortunadamente ha recibido la crítica que justamente merece. Insistir sobre un nivel estándar de formalización conjuntista en la enunciación de teorías es una protección contra verbalizaciones *ad hoc* y *post hoc*.

Suposiciones mínimas

La formalización de una teoría hace posible un análisis objetivo de cuáles son los supuestos mínimos necesarios para la enunciación de la teoría. Hay, pienso, una directa apelación estética en la faena de encontrar un conjunto de supuestos mutuamente independientes que sean autocontenidos como una formulación de una teoría: es filosóficamente interesante preguntar por qué hacemos esta búsqueda de un conjunto mínimo de suposiciones independientes, pero para los propósitos presentes es más importante reconocer que es casi de acuerdo universal. La significatividad de la cuestión «¿cuáles son las suposiciones mínimas en términos de las cuales la teoría puede ser formulada?» es más bien una prueba directa de la seriedad de nuestro entendimiento de la teoría y una medida de la profundidad de su desarrollo. Pedir que si una rama de la física clásica sea formulada en términos de un mínimo conjunto de suposiciones o axiomas es una cuestión significativa, pero la pregunta de cuál es el mínimo, pero suficiente conjunto de supuestos para el psicoanálisis no tiene ahora una respuesta seria. En la mayoría de las áreas de la ciencia aún no tenemos una clara formalización de la disciplina en términos de un conjunto mínimo de supuestos autocontenidos. Una tarea propia para los filósofos interesados en los fundamentos de la ciencia es proveer ese análisis. Yo defendería la afirmación de que ésta es una tarea para la cual los filósofos formalmente entrenados son más apropiados en la mayoría de los casos que los científicos que trabajan en la disciplina. El ejemplo de la relatividad mencionado abajo va al punto en este respecto.

Aunque pueden darse otros argumentos generales de la deseabi-

lidad de la formalización, me gustaría considerar ahora tres ejemplos un poco detallados de cómo los métodos de la formalización pueden contribuir de una manera útil a la clarificación de problemas conceptuales en diferentes dominios de la ciencia. El primer análisis se ocupa de la teoría especial de la relatividad, el segundo de la medición de propiedades intensivas y el terreno de la psicolingüística.

Relatividad

Cualquier persona con algún entrenamiento lógico que observa la literatura filosófica sobre la relatividad, desde Reichenbach a Grünbaum, probablemente experimentará un cierto sentimiento de inquietud. El origen de esta inquietud es la falta de claridad en los supuestos básicos de la teoría. Para nuestros propósitos aquí, podemos confinarnos a la teoría especial de la relatividad. Una respuesta posible es que la teoría especial de la relatividad es muchas cosas para muchos físicos, y que los filósofos no deberían pedir que les dieran un conjunto claro y fundamental de supuestos de los cuales se seguirían todos los resultados deseados. No obstante, no pienso que este punto de vista sea correcto. Una responsabilidad de los filósofos comprometidos en un análisis lógico de la relatividad es proveer suposiciones autocontenidas y claras de las cuales puedan derivarse los resultados básicos y fundamentales de la teoría. Puede haber en verdad algún argumento sobre exactamente cuáles resultados han de ser considerados fundamentales, pero escasamente puede haber cualquier desacuerdo acerca de la importancia esencial de mostrar que cualesquiera dos marcos de referencia inerciales están relacionados por una transformación de Lorentz. Un conjunto de axiomas o suposiciones formalmente autocontenidos del cual este resultado puede ser derivado no se encuentra en los escritos de Reichenbach ni de Grünbaum. Verdaderamente es sorprendente que las referencias relevantes no son ni siquiera dadas ni mencionadas en el amplio libro de Grünbaum sobre el espacio y el tiempo[2]. Desilusionados por los textos filosóficos que consultamos, podemos consultar libros de texto estándar o tratados de física. Aquí, sin embargo, encontramos los mismos problemas. De hecho, la discusión generalmente no es tan clara desde un

[2] A. Grunbaum (1963).

punto de vista lógico o matemático como la que se encuentra, por ejemplo, en Grünbaum. Los resultados negativos de nuestra búsqueda podrían impulsarnos a pensar que la materia es demasiado complicada o matemáticamente demasiado difícil como para ser completamente resuelta. Esta es la ironía de la situación. La matemática es elemental. Varias soluciones autocontenidas existen en la literatura, y por lo menos una (la de Robb)[3] ha existido durante treinta años; aunque pocos físicos y filósofos de la ciencia parecen estar enterados de los resultados.

Yo mostré hace un buen número de años que la única suposición necesaria para la cinemática relativista es que todos los observadores que yacen en marcos inerciales obtengan mediciones idénticas de distancias relativistas a lo largo de trayectorias inerciales cuando sus instrumentos de medición tienen calibraciones idénticas[4]. Es una consecuencia y *no* una suposición de este análisis que los observadores en diferentes marcos de referencia están moviéndose uno respecto a otro con velocidad uniforme. Más aún, no se requieren suposiciones de continuidad y linealidad. La teoría especial de la relatividad puede ser puesta sobre la estrecha base operacional de mediciones de distancia relativista a lo largo de trayectorias inerciales. Más aún, los principales resultados pueden obtenerse sobre un campo denumerable de números y, en verdad, sobre un campo de números que incluso no es arquimedeano. Por resultado «principal» quiero decir la derivación de que cualquier par de marcos de referencia están relacionados por una transformación de Lorentz. Desde el punto de vista de la física, es importante e interesante notar que no se requieren propiedades locales diferenciales y que en un sentido matemático estricto, la derivación de las transformaciones de Lorentz es elemental. Recientemente, E. C. Zeeman ha mostrado que no se requiere de los resultados de medición, sino que pueden usarse suposiciones de orden (aunque su demostración no vale para dos dimensiones)[5].

Debe ser patente cómo esos análisis explícitos de las suposiciones necesarias para establecer la cinemática relativista ejemplifican las virtudes de formalización descritas arriba en términos generales. La suposición única usada por mí o la usada por Zeeman es explícita, está en lenguaje matemático estándar, es autocontendida y es, en un sen-

[3] A. A. Robb (1936).
[4] Suppes (1959a).
[5] Zeeman (1964).

tido preciso que puede demostrarse, mínima. Esto no puede decirse de la mayoría de los análisis que se encuentran en libros de texto de física o en escritos de filósofos que se ocupan de la teoría de la relatividad. La generalidad ganada por la formalización es particularmente extraída por la consideración del hecho de que ni siquiera se requiere un campo arquimedeano de números para la derivación de las transformaciones de Lorentz. Esto hace muy claro el carácter elemental y también microscópico de la relatividad especial. No se requiere ninguna propiedad profunda del sistema de los números reales en la formulación de la teoría cinemática. De mucho mayor importancia filosófica es el reemplazo de descripciones algo vagas y ocasionalmente misteriosas acerca de las suposiciones básicas de la relatividad por axiomas formulados exactamente. A la cuestión «¿cuál es la base conceptual de la teoría especial de la relatividad?» pueden darse cualesquiera de varias respuestas equivalentes que no tienen residuo de confusión conceptual.

Medición fundamental de propiedades intensivas

Una de las disputas conceptualmente más interesantes en la teoría y en la práctica de la medición en ciencia es la de si es posible tener medición fundamental de propiedades intensivas. En primer lugar, la pretensión de medición fundamental involucra la pretensión de que puede establecerse una escala cuantitativa sobre la base de observaciones empíricas cualitativas que no asumen mediciones anteriores. La distinción entre propiedades intensivas y extensivas es tan vieja en ciencia y filosofía que se remonta al menos a Aristóteles, y tiene una amplia literatura incluso en la Edad Media bajo el tópico de intensión y remisión de formas. Las propiedades extensivas, o magnitudes, son propiedades que pueden sumarse; por ejemplo, la masa y la longitud son extensivas. Las propiedades intensivas, en cambio, no pueden sumarse, incluso aunque pueden medirse. Por ejemplo, dos volúmenes de gas con la misma temperatura no se combinan para formar un gas con el doble de temperatura. Se ha pretendido repetidamente por algunos teóricos de la medición, notablemente N. R. Campbell, que la medición fundamental de las propiedades intensivas no es posible. Así en su discusión de la medición de la temperatura, Campbell concluye que no es posible la medición fundamental de la temperatura ya que «no hay ningún proceso físico de

adición para la temperatura»[6]. El análisis, lleno de intuiciones pero confuso, de la medición de Campbell ha tenido ramificaciones en muchas otras áreas de la ciencia. Su posición, por ejemplo, fue esencialmente adoptada en un influyente artículo acerca de la medición en psicología por Bergmann y Spence[7]. Aquí está lo que ellos dicen:

> En dimensiones extensionales, y sólo en dimensiones extensionales, puede darse un significado factual a la igualdad de diferencias numéricas sin establecer cualquier otra ley empírica que los axiomas mismos de la medición. (p. 111).

Hasta relativamente tiempos recientes las concepciones expresadas por Campbell, Bergmann y Spencer, y otros, de que las propiedades intensivas no pueden medirse fundamentalmente fueron ampliamente esparcidas, y todavía están en circulación en algunas partes. Con todo, es elemental y simple demostrar que esas concepciones, expresadas tan categórica y dogmáticamente, no descansan sobre ningún análisis formal serio y pueden de hecho refutarse por simples contraejemplos que son por ellos mismos aplicables a la medición de propiedades intensivas. Una de las virtudes más importantes de la formalización puede extraerse de este contexto. Dentro de una disciplina que está formalizada, aserciones como aquellas de Campbell o Bergmann y Spence, simplemente no se hacen sin demostración formal. Uno de los desarrollos formales más importantes en la historia de las matemáticas y la lógica ha sido el desarrollo de técnicas para demostrar que ciertas cosas no son posibles. Ejemplos clásicos son las demostraciones de que ángulos arbitrarios no pueden ser trisectados por escuadras y compás, que la raíz cuadrada de 2 no puede representarse por el radio de dos enteros, y que el postulado de las paralelas de Euclides no puede derivarse de los otros postulados.

En lógica y matemáticas, las aserciones generales de imposibilidad deben ser sostenidas por demostraciones precisamente definidas para ser tomadas en serio. Exactamente los mismos estándar pueden aplicarse en ciencia cuando está organizada dentro de un marco formal. En el caso de las propiedades intensivas, por ejemplo, es trivial mostrar que una relación cuaternaria que expresa igualdad de dife-

[6] Campbell (1920).
[7] Bergmann y Spencer (1944).

rencias numéricas es invariante bajo un cambio de unidad y origen, y así no representa una relación que exprese aditividad, la cual es invariante sólo bajo cambio de unidad. Tales escalas son ahora ampliamente usadas en la medición de la utilidad y otras características psicológicas. También es simple y elemental dar axiomas para tales relaciones cuaternarias en términos puramente cualitativos. Puede encontrarse un ejemplo en mi texto de lógica[8] y una discusión más extensa en el artículo de Zinnes y mío[9].

A menos que la discusión de la medición de propiedades intensivas sea puesta dentro de un marco formal, hay poca esperanza de un esclarecimiento exacto de los temas. Por supuesto, el problema con Campbell es que él fue un físico experimental y realmente no entendía ningún tipo de argumento matemático. El se habría sorprendido por la petición de que diera una demostración de su aserción de que sólo las propiedades extensivas pueden medirse fundamentalmente. Puede hacerse una defensa de que la concepción de Campbell no fue mucho más lejos en la discusión de las intensiones cualitativas y cuantitativas y la remisión de formas que Thomas Bradwardine de Merton en el siglo catorce. Ciertamente Arquímedes o Ptolomeo, si confrontaran el libro de Campbell *Physics: The Elements*, encontrarían casi increíble la degradación en el estándar de análisis y claridad conceptual que ha tenido lugar sobre un período de dos mil años.

Psicolingüística

Fuertes vientos de opinión divergente se sienten corrientemente más en la psicolingüística que casi en cualquier otro campo de la ciencia. Ha sido intenso el conflicto entre lingüistas que usan conceptos mentalistas y psicólogos que usan un conjunto restringido de conceptos conductistas, por lo menos desde la publicación de la reseña de Chomsky (1959) del libro de Skinner *Verbal Behavior*[10]. Entre el cúmulo de aserciones y contraserciones hechas tanto por lingüistas como por psicólogos, he seleccionado una cuestión para comentar aquí. Los lingüistas de persuasión chomskiana han afirmado en repetidas ocasiones, y en algunas incluso también han tratado de de-

[8] Suppes (1957).
[9] Suppes y Zinnes (1963).
[10] Chomsky (1959).

mostrar, que ninguna teoría estándar del estímulo-respuesta del condicionamiento puede dar cuenta de cualquier aspecto central del comportamiento lingüístico. Por ejemplo, Katz y Postal declaran en su libro que «Una teoría del condicionamiento de la adquisición del lenguaje debe rechazarse por ser, en principio, incapaz de explicar cómo se aprende el lenguaje»[11]. Aunque han dado algunos argumentos para sostener esta aserción, no dan ninguna demostración seria del género discutido arriba, el cual es estándar en aserciones matemáticas de naturaleza negativa. Incluso es dudoso si ellos reconocen plenamente la necesidad de una demostración tal para dar a su aserción acerca de la teoría del condicionamiento un estatus definido. Sobre todo, ellos no dan una clara interpretación formal de la frase «en principio»; aunque tal interpretación es ciertamente de suma importancia en cualquier análisis serio de este tipo. Por ejemplo, ellos no distinguen entre la aserción de que ninguna extensión conservativa de la teoría del condicionamiento puede dar cuenta de aspectos mayores del aprendizaje del lenguaje, y la aserción más fuerte de que aun con la adición de otros conceptos conductistas, la teoría no será suficiente. Entiendo aquí por una extensión *conservativa* de la teoría, una tal que emplearía los mismos conceptos fundamentales que la teoría original[12].

Un intento más ambicioso del mismo género que el de Katz y Postal ha sido hecho recientemente por Bever, Fodor y Garret[13]. Ellos intentan una demostración formal de las limitaciones del asociativismo, o lo que viene a ser lo mismo, la teoría del estímulo-respuesta del condicionamiento. Sin embargo, su supuesta demostración no es una demostración formal en ningún sentido, y lo que tienen que decir acerca del postulado informalmente establecido desde el cual trabajan es conceptualmente confuso. Su postulado fundamental es que «Los principios asociativos son reglas definidas sobre el vocabulario 'terminal' de una teoría, i. e., sobre el vocabulario en el cual la conducta es descrita» (p. 583). No muchas líneas adelante, ellos afirman que «Un corolario del postulado terminal es que, puesto que la conducta es organizada en el transcurso del tiempo, cualquier relación asociativa es una relación entre elementos a la izquierda y la derecha de una secuencia» (*loc. cit.*). No se intenta ninguna demostración de

[11] Katz y Postal (1964).
[12] Para una discusión más detallada de este punto véase Crothers y Suppes (1967).
[13] Bever *et al* (1968).

este corolario y es patente que en ningún sentido matemáticamente serio es una consecuencia lógica de su postulado fundamental. Ellos discuten el caso simple de un lenguaje imagen-espejo formado a partir de un vocabulario de dos letras. Las series gramáticales de este lenguaje son entonces precisamente series de la forma *aa, abba, aabbaa,* etc. Hacen la observación correcta de que un lenguaje tal no puede ser generado por un autómata finito, pero ellos consideran este hecho como evidencia de una limitación formal del asociativismo. No se discute la relevancia de este ejemplo para cualquier explicación seria del lenguaje. De hecho, mucho de lo que dicen los lingüistas acerca de los lenguajes que no pueden ser generados por autómatas finitos parece ser tan irrelevante para cualquier teoría del aprendizaje del lenguaje y del comportamiento lingüístico real como la demostración de que ninguna computadora real puede generar el conjunto de las funciones no recursivas. Ulterior evidencia de confusión en este punto por parte de Bever, Fodor y Garrett es clara desde las líneas finales de su artículo. Ellos dicen que aun si un gran repertorio de comportamiento puede ser generado por principios asociativos, teorías más poderosas pueden explicar más el comportamiento y, por lo tanto, el comportamiento puede ser explicado más satisfactoriamente por estas teorías más poderosas. Ellos cierran con la observación que «Todo lo que puedes hacer con una mano atada a la espalda, puedes hacerlo con ambas manos libres». Es difícil pensar en una observación que sea matemáticamente menos opuesta a la tarea de dar una explicación realista del aprendizaje del lenguaje y la conducta lingüística. Si estamos por tomar seriamente esta observación y las anteriores observaciones acerca de teorías poderosas, no hay razón para buscar modelos de grado apropiado de complejidad y poder. Podríamos igualmente bien postular desde el comienzo que tenemos una máquina universal de Turing o, si el carácter no recursivo de tal invento es también una gran limitación, entonces postular que nosotros hemos inventado un expediente abstracto que puede generar todas las funciones, recursivas o no. Es de esperarse que se encuentren en ese artículo mezclas de confusiones conceptuales cuando se discuten puntos formales relativamente sutiles, sin una atención seria a cuestiones de formulación exacta o demostración.

Contrario a lo que estos dos ejemplos sugieren, no quiero argüir que el pecado capital de pretensiones temerarias es cometido solamente por los lingüistas. La crítica paciente y detallada de Chomsky de las exageradas aserciones hechas por Skinner en *Verbal Behavior*

ha tenido un efecto saludable en psicología, y la tendencia de los psicólogos de pretender demasiado de las teorías ha sido adecuadamente contenida por las fulminantes contraaserciones de los lingüistas.

Es generalmente reconocido en matemáticas que los argumentos negativos deben ser formulados de una manera más formal y explícita que los argumentos positivos. Además, cualquiera que ha observado las innumerables soluciones sugeridas en los últimos varios cientos de años al problema clásico de la trisección de ángulos con escuadra y compás, reconocería que los estándares de formalización adoptados por Bever, Fodor y Garrett están abajo de muchas de esas soluciones positivas falsas. Es particularmente incumbente a quienes desean hacer una aserción negativa acerca de cualquier teoría, sea la teoría del condicionamiento o la teoría de las construcciones geométricas, hacer un argumento matemático en una manera formal y explícita.

Una profunda controversia conceptual en un dominio dado de la ciencia puede ser una de las influencias más estimulantes en el crecimiento del conocimiento en ese dominio. Los desafíos y respuestas yendo de un lado a otro entre lingüistas y psicólogos es probablemente una de las controversias más sanas e importantes en psicología en este siglo. El papel constructivo de la formalización en tales controversias debería ser patente. La última razón a favor de la formalización es que provee la mejor manera objetiva que conocemos para convencer a un oponente de una aserción conceptual. Como he señalado, el uso más amplio de la formalización en la fundamentación de las matemáticas es indudablemente responsable del gran progreso que hemos visto en esa disciplina durante los últimos cien años. Lingüistas como Chomsky han introducido una nueva maquinaria formal y un nuevo tipo de formalización en el análisis psicológico de la conducta, especialmente de la conducta lingüística. Las aserciones en demasía apasionadas y formalmente insostenibles que han sido hechas a raíz de esta introducción son consecuencias naturales de un nuevo e importante desarrollo científico. Al cabo, lo que es más importante y especialmente relevante para el tópico de este artículo es la introducción de jerarquías de gramáticas y autómatas que generan esas gramáticas. Aun si los psicólogos no están deseosos de aceptar cualquier gramática que requiera un autómata con un ilimitado número de estados, como, por ejemplo, los autómatas requeridos por gramáticas arbitrarias libres de contexto, modelos finitarios propuestos para reflejar la realización efectiva de los seres humanos, deben

aún reflejar muchas de las propiedades de estos autómatas potencialmente infinitos. La insistencia de los lingüistas de que ellos no aceptarían nada menos que una explicación completa y detallada, probablemente se convertirá en la demanda conceptual más importante en psicología en este siglo. Dado el atrincheramiento de las varias posiciones en la controversia, puedo ver a la formalización explícita de una teoría relevante en una manera conjuntista estándar como el único camino de establecer las cuestiones teóricas, y el correspondiente análisis formal de los datos como la única manera de establecer satisfactoriamente las cuestiones empíricas.

Extendiendo lo que he dicho a otras áreas de la ciencia, concluiré con un argumento trascendental a favor de la formalización de la ciencia. La formalización es necesaria para lograr resoluciones objetivas en conflicto. No hay otros medios generales para resolver conflictos conceptuales en ciencia. Más aún, en una amplia variedad de situaciones experimentales, no hay manera objetiva de resolver disputas acerca de la interpretación de datos, excepto por el uso cuidadoso y explícito de los métodos conjuntistas de la estadística matemática contemporánea. Pero lo que es necesario es necesariamente deseable, y así es con la formalización en ciencia.

Capítulo 5
LA PLURALIDAD DE LA CIENCIA*

Lo que tengo que decir cae bajo cuatro encabezados: qué es la unidad de la ciencia, la unidad y el reduccionismo, la búsqueda de certeza y la búsqueda de completud.

1. ¿Qué es, supuestamente, la unidad de la ciencia?

Para responder a esta pregunta inicial acudiré al ensayo introductorio de Otto Neurath (1938) del volumen I, parte I, de la *International Encyclopedia of Unified Science*. Se inicia de este modo:

> La ciencia unificada se convierte históricamente en el tema de esta *Encyclopedia* como un resultado de los esfuerzos del movimiento por la unidad de la ciencia, el cual incluye a científi-

---

* Publicado originalmente en *Philosophy of Science Association*, vol. 2, 1978, pp. 3-16. Versión castellana de Francisco Pimentel Sánchez.

[1] Estoy en deuda con Georg Kreisel por un buen número de penetrantes críticas al primer borrador de este artículo.

cos y personas interesadas en la ciencia, que están conscientes de la importancia de una actitud científica universal.

La nueva versión de la idea de la ciencia unificada se ha creado por la confluencia de corrientes intelectuales divergentes. La labor empírica de los científicos a menudo ha sido antagónica con las construcciones lógicas de racionalismos *a priori*, engendrados por sistemas filosóficos-religiosos; por tanto, 'empirización' y 'logicización' generalmente han sido considerados opuestos —ahora, por primera vez en la historia, ambos han sido sintetizados (p. 1).

Posteriormente continúa:

> La visión y el pensamiento omniabarcador son un viejo deseo de la humanidad... Este interés de combinar conceptos y enunciados sin demostración empírica, preparó una cierta actitud que pareció en las épocas sucesivas una construcción metafísica. El rechazo de hechos de comprobación y del uso de enunciados de observación en relación con todas las ideas sistematizadas se halla especialmente en diferentes sistemas idealistas. (pp. 5 y 6).

Posteriormente dice:

> Una aplicación universal del análisis y construcción lógica a la ciencia en general, ha sido preparada no sólo por la sistematización de los procedimientos empíricos y la sistematización del análisis lógico-empírico de los enunciados científicos, sino también por el análisis del lenguaje desde diferentes puntos de vista (pp. 16 y 17).

En el mismo volumen de la *Encyclopedia*, la tesis sobre la unidad del lenguaje de la ciencia se considera en mucho más detalle en el análisis de Carnap de los fundamentos lógicos de la unidad de la ciencia. Establece sus bien conocidos puntos de vista sobre el fisicalismo y, respecto de los términos o predicados del lenguaje, concluye:

> El resultado de nuestro análisis es que la clase de predicados de cosas observables es una base suficiente de reducción para la to-

> talidad del lenguaje de la ciencia, incluyendo la parte cognocitiva del lenguaje cotidiano ([1938], p. 60).

En relación con la unidad de las leyes, Carnap llega a una conclusión negativa pero optimista —optimista en el sentido de que no se ha mostrado que la reductibilidad de las leyes de una ciencia a otra sea imposible—. Esto es lo que él ha tenido que decir sobre la reducción de leyes biológicas a leyes físicas:

> Hay un lenguaje común al cual pertenecen tanto las leyes biológicas como las leyes físicas, de tal modo que pueden compararse y conectarse. Podemos preguntar si una cierta ley biológica es o no es compatible con el sistema de leyes físicas, y si es o no derivable de ellas. Pero la respuesta a estas preguntas no puede ser inferida de la reductibilidad de los términos. En el presente estado del desarrollo de la ciencia, ciertamente no es posible derivar las leyes biológicas de las físicas. Algunos filósofos creen que una derivación tal es por siempre imposible, en vista de la misma naturaleza de los dos ámbitos. Pero las pruebas hasta ahora procuradas para esta tesis son ciertamente insuficientes ([1938], p. 60).

Posteriormente tiene el mismo tipo de cosas que decir sobre la reducción de la psicología u otras ciencias sociales a la biología.

Un acercamiento diferente y menos lingüístico es el contrastar la unidad de la temática científica con la unidad del método científico. Muchos estarían de acuerdo en que diferentes ciencias tienen diferentes objetos de estudio; por ejemplo, en ningún sentido real, el objeto de estudio de la astronomía es el mismo que el de la psicofarmacología. Pero muchos afirmarían que a pesar de la radical diferencia en la temática de la ciencia, hay importantes formas en las cuales los métodos de la ciencia son los mismos en todo dominio de investigación. Los más obvios y simples ejemplos vienen a la mente inmediatamente. No hay una aritmética para las teorías psicológicas de la motivación y otra para las teorías cosmológicas del universo. Más en general, no hay teorías diferentes del cálculo diferencial e integral o de ecuaciones diferenciales parciales o de la teoría de la probabilidad.

Hay una gran masa de métodos matemáticos y resultados que son aptos para usarse en todos los dominios de la ciencia y que son, de hecho, completamente de amplio uso en muy diferentes partes de

ella. Plausiblemente, a primera vista, tiene caso la unidad de la ciencia en términos de unidad del método científico. Este puede ser uno de los más razonables significados que se le ha de ligar a cualquier tesis central sobre la unidad de la ciencia. Sin embargo, en lo que sigue seré negativo aun sobre esta tesis.

2. Unidad y reduccionismo

Lo que he dicho antes acerca de diferentes ciencias que tienen obviamente diferentes objetos de estudio fue demasiado apresurado, ya que hay un sentido históricamente importante de unidad. Una forma u otra de reduccionismo ha sido central en la discusión de la unidad de la ciencia por un largo tiempo. Me concentraré en tres de tales formas: reducción del lenguaje, reducción del objeto de estudio y reducción del método.

2.1. *Reducción del lenguaje*

El enfoque de Carnap a la reducción del lenguaje de la ciencia al lenguaje del sentido común sobre objetos físicos sigue siendo atractivo. Formula su tesis general de tal modo que no se implica ningún argumento fuerte sobre la reducción de la psicología a la física, por ejemplo; y estoy seguro de que mucho de lo que ha dicho es correcto. Por otra parte, parece apropiado enfatizar los sentidos muy claros en los que no hay reducción de lenguaje. La reducción ciertamente no tiene lugar en la práctica, y puede sostenerse correctamente que la reducción en teoría sigue estando en un estado vago sin esperanza.

Hay muchas maneras de ilustrar las bases de mi escepticismo sobre cualquier reducción seria del lenguaje. Parte de mi tesis sobre la pluralidad de la ciencia es que los lenguajes de diferentes campos de la ciencia son divergentes más que convergentes en la medida en que se vuelven cada vez más técnicos. Permítaseme empezar con un ejemplo personal. Mi hija Patricia está inscrita en un doctorado en neurofisiología, y recientemente me dio una suscripción a lo que se supone que es una revista expositiva, llamada *Neurosciences: Research Bulletin*. Después de muchos esfuerzos por leer la revista, llegué a la conclusión de que la exposición es sólo para aquellos que están dentro de disciplinas cercanas. Citaré un pasaje de un número (Smith y

Kreutzbere [1976]) que trata de interacciones entre células neuronales.

> Los estudios anteriores definen la regulación anterógrada transsinápctica de ontogenía adrenérgica. Black y colaboradores han demostrado también que neuronas postsinápticas regulan el desarrollo presinápctico a través de un proceso retrógrado. Durante el curso de maduración, la actividad ChAc presináptica se incrementa de 30 a 40 enlaces (fig. 19), y esto provoca paralelamente la formación de sinápsis gangliónicas (fig. 20). Si neuronas postsinápticas adrenérgicas en ratas neonatales fueran químicamente destruidas con hidroxidopamina-6 (fig. 24) o inmunológicamente destruidas con antiserum a la NGF (fig. 25), el desarrollo normal de la actividad ChAc presináptica sería prevenido. Estos datos, vistos en conjunción con los estudios de regulación de anterógrado, llevan a la conclusión de que hay un flujo bidireccional de información regulatoria en la sinapsis durante el desarrollo (p. 253).

Este no es de ninguna manera el pasaje menos inteligible. Me parece que ilustra los hechos cognoscitivos de la vida. Las ciencias son divergentes y no hay razón para pensar que alguna vez ocurrirá algún tipo de convergencia. Es más, esta divergencia no es algo de origen reciente. Ha estado presente por mucho tiempo en la más antigua de las ciencias cuantitativas, la astronomía; y está ahora incrementadamente presente a lo largo de todos los ámbitos de la ciencia.

Hay otro punto que quiero manifestar en oposición a un argumento elaborado por algunos filósofos y físicos con inclinaciones filosóficas. Algunas personas han sostenido que por lo menos en las ciencias físicas, puede esperarse en el futuro una unificación sustancial teórica y, con esta unificación, una unificación del lenguaje teórico de las ciencias físicas; con ello, simplificando el problema cognocitivo de entender varios dominios. Tengo escepticismo sobre esta tesis, el cual explicaré luego, pero en este punto quiero enfatizar que toma en cuenta sólo una pequeña parte de las dificultades. Es el lenguaje experimental de las ciencias físicas como el de otras ciencias lo que es difícil entender para el lego y no tanto el lenguaje teórico. Creo que no hay comparación en las dificultades cognocitivas para un filósofo al leer artículos teóricos sobre mecánica cuántica y al leer artículos experimentales comunes y corrientes en cualquier campo de-

sarrollado de la física. La literatura experimental es simplemente imposible de penetrar sin un esfuerzo mayor de aprendizaje. Hay razones para esta impenetrabilidad en las que no intentaré entrar en esta ocasión, sino las estipularé como establecidas de hecho.

Personalmente aplaudo la divergencia en el lenguaje de la ciencia y no encuentro en ella bases para un escepticismo o pesimismo sobre el crecimiento continuo de la ciencia. El pluralismo irreductible del lenguaje de la ciencia es una característica tan deseable como la pluralidad irreductible de enfoques políticos en una democracia.

2.2. *Reducción del objeto de estudio*

Por lo menos desde tiempo de Demócrito en el siglo V a. C., se han establecido atractivas y poderosas tesis sobre la reducción de todos los fenómenos a átomos en movimiento. Dado el impresionante acontecimiento de la teoría atómica de la materia desde los inicios del siglo XIX, esta teoría ha dominado los puntos de vista tanto de hombres comunes como filósofos. En un sentido, es difícil negar que todo en el universo no es otra cosa que algún singular enjambre de partículas. Por supuesto, en la medida en que nos movemos hacia la última parte del siglo XX, reconocemos esta fantasía por lo que es. No tenemos ahora más claridad acerca de lo que decimos por partículas ni incluso si el concepto como fue originalmente formulado está de algún modo cercano a la evidencia. El universo, por supuesto, está hecho de algo, pero somos bastante ignorantes sobre lo que ese algo sea. ¿«Cuanto»? Cuanto más probamos, más parece que el tipo de enfoque simple y ordinario enunciado como parte del atomismo antiguo y que parecía tan cerca de la realización hacia el final del siglo XIX está aún lejos de ser una descripción verdadera. Para invertir la frase anterior, no hay enjambres de partículas de los que están hechas las cosas, sino partículas que están hechas de enjambres. Hay aún físicos que sostienen que algún día encontraremos los elementos últimos a partir de los cuales están hechas las otras cosas, pero como tales afirmaciones han sido continuamente revisadas y como la complejidad de la física de alta energía y de la teoría de las partículas elementales se ha incrementado, parecería haber poca posibilidad de que seremos capaces de creer seriamente otra vez en el sentido fuerte de reduccionismo que tan atractivamente formuló Demócrito.

Poniendo el asunto a la manera escéptica, no podemos tener una

reducción del objeto de estudio hasta las últimas entidades físicas porque no sabemos qué son aquéllas entidades. He expresado en otra ocasión (1974) mis razones para sostener que la teoría de la materia de Aristóteles puede ser más sensata y sensible que el tipo de enfoque ingenuo del atomismo reduccionista que ha dominado nuestro pensamiento sobre el mundo físico durante 200 años.

Hay otro atractivo argumento contra la reducción del objeto de estudio en el sentido físico que no descansa en la controversia sobre el estatus de eventos físicos sino en lo que ha sucedido en el desarrollo de las computadoras. Quizá por primera vez nos hemos vuelto conscientes total y completamente de que las mismas estructuras cognocitivas pueden ser realizadas de maneras físicas radicalmente diferentes. Tengo en mente el hecho de que ahora tenemos computadoras que son construidas sobre principios físicos completamente distintos; por ejemplo, computadoras antiguas que usan tubos de vacío y computadoras modernas que usan semiconductores pueden ejecutar exactamente las mismas tareas. Las diferencias en las propiedades físicas entre estas dos generaciones de computadoras son sorprendentes. Están en fuerte contraste con diferentes generaciones de especies animales que tienen muy similares constituciones físicas, pero que pueden tener muy diferentes historias culturales. A menudo se ha llamado la atención sobre aquellos hombres de constitución completamente similar que pueden tener pensamientos completamente diferentes. El caso de las computadoras formula este argumento puntualmente —no es que el *hardware* sea lo mismo y que el *software* sea diferente, sino más bien que el *hardware* es radicalmente diferente y el *software* de pensamientos el mismo—. La reducción de esta situación, bajo el nivel de conceptos de procesos de información, parece totalmente carente de interés y estéril. La reducción a conceptos físicos no sólo es impráctica sino también teóricamente vacua.

El mismo tipo de argumentos contra el reduccionismo de objetos de estudio puede incluso ser encontrado dentro de la física. Un ejemplo familiar es el enfoque corrientemente aceptado de que no tiene esperanza tratar de resolver los problemas de química cuántica aplicando las leyes fundamentales de mecánica cuántica. De la misma manera no tiene éxito el programar una computadora para jugar una partida perfecta de ajedrez por medio de prever todos los posibles movimientos futuros. La explosión combinatoria es tan drástica y tan abrumadora que pueden ofrecerse argumentos teóricos de que no sólo ahora sino también en el futuro será imposible por computación di-

recta reducir los problemas de la química cuántica a los problemas de la mecánica cuántica ordinaria. La química cuántica, a pesar de su proximidad a la mecánica cuántica es, y seguirá siendo, una disciplina esencialmente autónoma. A nivel de computabilidad, la reducción no sólo es prácticamente imposible sino también teóricamente.

Un impresionante ejemplo sustantivo de reducción es la reducción de gran parte de las matemáticas a la teoría de conjuntos. Pero aun aquí, la reducción a un solo objeto de estudio de las diferentes partes de la matemática posee un tipo de estéril formalidad. No es el hecho de que la reducción es conceptualmente carente de interés, sino más bien que tiene un interés limitado y no dice mucho sobre muchos aspectos de las matemáticas. Las matemáticas, como la ciencia, está construida a partir de muy diferentes subdisciplinas, cada una de ellas siguiendo su propia vía y cada una primariamente sensible a los matices de su propio objeto de estudio. Es más, en la medida en que hemos alcanzado un entendimiento más profundo de los fundamentos de las matemáticas, hemos llegado a darnos cuenta que los fundamentos no tienen por qué construirse sobre una roca sólida de certeza, sino que, en muchos sentidos, partes desarrolladas de las matemáticas son mucho mejor entendidas que los fundamentos mismos. Como en el caso de la física, un esfuerzo de reducción es ahora un esfuerzo de reducción a no sabemos qué.

Un ejemplo matemático de muchas maneras más significativo es la reducción de la matemática computacional a la computabilidad por medio de máquinas de Turing, pero como en el caso de la teoría de conjuntos, la reducción es irrelevante a la mayoría de los problemas computacionales de interés teórico o práctico.

2.3. *Reducción de método*

Como señalé antes, muchos filósofos y científicos argumentarían que hay un sentido importante en el cual los métodos de la ciencia son los mismos en todo dominio de investigación. Algunos aspectos en este sentido de unidad, como también anoté, son bien reconocidos e indisputables. El uso común de matemáticas elementales y la enseñanza común de métodos matemáticos para la aplicación en todos los dominios de la ciencia puede difícilmente ser negado. Pero me parece que ahora es importante enfatizar la pluralidad de los métodos y la vasta diferencia en la metodología de diferentes partes de

la ciencia. El uso de matemáticas elementales —y enfatizo *elementales*, porque casi todas las aplicaciones de las matemáticas en la ciencia son elementales desde un punto de vista matemático— tanto como el uso de ciertos métodos estadísticos elementales no van muy lejos en la caracterización de la metodología de cualquier campo de la ciencia. Como enfaticé antes, son especialmente los métodos experimentales de diferentes campos de la ciencia los que tienen formas radicalmente diferentes. No es una exageración decir que los manuales de método experimental para una disciplina son generalmente ilegibles para expertos en otra disciplina (la definición de «disciplina» puede aquí ser completamente estrecha). Los físicos que trabajan en la física de estados sólidos no pueden inteligiblemente leer las explicaciones de método en otra parte de la física. Esto es verdad incluso en ciencias menos desarrolladas como la psicología. Los psicofisiólogos usan un conjunto de métodos experimentales que son extraños a psicólogos especializados, por ejemplo, en teoría de pruebas educacionales, y correspondientemente los intrincados detalles de la metodología de la construcción de pruebas serán desconocidos casi para cualquier psicofisiólogo.

Aun dentro del estrecho dominio de los métodos estadísticos, diferentes disciplinas tienen diferentes acercamientos estadísticos a su temática particular. Las herramientas estadísticas de los psicólogos son en general completamente diferentes de las de los economistas. Es más, dentro de una disciplina singularmente amplia como la física, hay en distintas áreas gran variedad en el uso de los métodos estadísticos, un hecho que ha sido bien documentado por Paul Humphreys (1976).

La unidad de la ciencia surge en buen grado como un llanto nostálgico de los filósofos que tratan de vencer el gran peso del idealismo alemán del siglo XIX. Medio siglo después el panorama es muy diferente. El período desde la *Encyclopedia of Unified Science* primero pareció ser la era del mayor desarrollo y expansión de la ciencia en la historia del pensamiento. La empresa masiva de la ciencia ya no necesitó más de ningún apuntalamiento filosófico para protegerse de enfoques filosóficos errantes. El llanto nostálgico por la unidad seguido por tres brindis a favor del reduccionismo deberían ahora ser reemplazados por un paciente examen de las diferentes maneras en las que distintas ciencias difieren en lenguaje, objeto de estudio y método, igualmente de enfoques sinópticos de los modos en los que son semejantes.

Relacionados con la unidad y la reducción están los dos antiquísimos temas de la certeza del conocimiento y la completud de la ciencia. Para demostrar lo que me propongo respecto de la pluralidad de la ciencia, quiero decir algo acerca de ambos insostenibles dogmas.

3. La búsqueda de certeza

Desde Descartes hasta Russell, un tema central de la filosofía moderna ha sido la proposición de métodos por medio de los cuales la certeza del conocimiento pueda ser alcanzada. La intención repetidamente manifestada ha sido la de encontrar una base que sea, por una parte, cierta y, por la otra, adecuada para la superestructura restante del conocimiento, incluyendo a la ciencia. La introducción del concepto de datos de los sentidos y la historia del uso de este concepto ha dominado la búsqueda de la certeza del conocimiento, especialmente en la tradición empirista, como una alternativa al conocimiento racional directo del universo.

Todos nosotros podemos aplaudir la crítica del racionalismo y el justificable interés de no aceptar la posibilidad de conocimiento directo del mundo careciendo de experiencia. Pero claramente fue por un deseo de rivalizar con el tipo de fundamento que ofreció el racionalismo que se dio el erróneo paso posterior de intentar basar el conocimiento en la experiencia de tal modo que se garantizara certeza en los resultados. La reducción del análisis de la experiencia a datos de los sentidos es ella misma uno de los grandes y fútiles temas del reduccionismo; en este caso en gran parte manipulado por la cuestión de la certeza. Aunque no es apropiado tratar aquí los amplios puntos epistemológicos involucrados, quiero considerar algunas cuestiones particulares sobre la certeza que han sido importantes en el desarrollo de los métodos científicos modernos.

3.1. *Errores de medición*

Con el desarrollo de la metodología científica y la teoría de la probabilidad en el siglo XVIII, se reconoció que no sólo surgieron errores en las mediciones, sino también que podría ofrecerse una teoría de estos errores. Sobre este punto se escribieron memorias fundamentales por Simpson, Lagrange, Laplace y otros. Para nuestros

propósitos, lo que importa sobre esas memorias es que no se examinó la existencia o no existencia de un valor exacto para la cantidad que se mide. Estaba implícito en los desarrollos de este siglo XVIII, así como lo estaba en la teoría entera de la probabilidad de Laplace, que las consideraciones probabilistas, inclusive sobre errores, surgen de la ignorancia de las causas verdaderas, y que el universo físico está constituido de tal modo que, en principio, deberíamos ser capaces de lograr el verdadero valor exacto de cualquier cantidad física mensurable. A lo largo del siglo XIX estaba implícito que era simplemente un asunto de tedioso y tardado esfuerzo refinar los valores medidos de cualquier cantidad a un dígito más significativo. No permaneció nada fundamental en el modo de hacer tal refinamiento. Es un hecho curioso y conceptualmente interesante que, hasta donde sé, nadie en este período enunció la tesis de que todo esto era un error, de que había continuas fluctuaciones fortuitas en todas las cantidades reales continuas, y que el concepto de un valor exacto no tiene significado claro.

El desarrollo de la mecánica cuántica en este siglo hizo que los físicos reconocieran de mala gana, pero conclusivamente, que no tenía sentido sostener que cualquier cantidad física podía ser medida con precisión arbitraria en conjunción con la medición simultánea de otras cantidades físicas relacionadas. Fue reconocido que la incapacidad para hacer mediciones exactas no es debida a inadecuaciones tecnológicas del equipo de medición sino que es central a la teoría fundamental misma.

Aun dentro del marco de la mecánica cuántica, sin embargo, ha habido la tendencia a una amplia equivocación conceptual sobre la naturaleza de la incertidumbre. Por una parte se ha sostenido que la interferencia del aparato de medición hace a la incertidumbre una consecuencia necesaria. En este contexto se requiere notar algunos aspectos de la incertidumbre. No es sorprendente que si medimos seres humanos en tiempos y lugares diferentes esperemos obtener diferentes medidas de altura y peso. Pero en el caso de la mecánica cuántica lo que es sorprendente es que la variación se halla en partículas sometidas a «idénticas» preparaciones experimentales. Una vez más está funcionando una tesis de simplicidad y unidad. Los electrones deberían diferir sólo en identidad numérica, no en alguna de sus propiedades. Y si esto no es verdad de los electrones, deberá haber partículas más finas descubribles que sí satisfagan un principio tal de identidad.

El otro enfoque, y el más firme a mi juicio, consiste en que las fluctuaciones fortuitas son una parte intrínseca de la conducta de los fenómenos microscópicos. No se requiere ningún proceso de medición para generar estas fluctuaciones; ellas son una parte de la naturaleza y conducen a un enfoque natural de la imposibilidad de obtener resultados de precisión arbitraria acerca de las cantidades físicas microscópicas.

Si examinamos el estatus de teorías y experimentos en otros dominios de la ciencia, me parece que pueden hacerse propuestas similares sobre la ausencia de certeza. La motivación por la certeza asociada a la física clásica, el empirismo británico, y el idealismo kantiano, está gastada ahora.

4. La búsqueda de completud

Enfoques sobre la unidad de la ciencia, unidos con enfoques sobre la reducción del conocimiento a una base epistemológicamente cierta, como aquella de los datos de los sentidos, a menudo están acompañados de una doctrina implícita de completud. Una doctrina tal generalmente es expresada por medio de suposiciones sobre la uniformidad de la naturaleza y la suposición de que el universo está en último término totalmente ordenado y, en consecuencia, es completamente cognoscible en carácter. Unidad, certeza y completud fácilmente pueden ponerse juntas para producir una fantasía filosófica deliciosa.

4.1. *Completud lógica*

La lógica es la única área de la experiencia en la cual se ha desarrollado una teoría de la completud realmente satisfactoria. Los hechos son bastante familiares como para requerir una revisión detallada. El resultado fundamental es el teorema de completud de Gödel que dice que una fórmula en la lógica de primer orden es universalmente válida si y sólo si es lógicamente demostrable. De esta manera, nuestro aparato de derivación lógica es adecuado para la tarea de derivar cualquier fórmula lógicamente válida, esto es, cualquier verdad lógica. Lo que tenemos en la lógica de primer orden es una feliz unión de la sintaxis y la semántica.

Por otra parte, como ha enfatizado Kreisel en numerosas publicaciones (p. ej., [1967]), esta unión de sintaxis y semántica no es usada en la demostración de teoremas lógicos. Más bien, continuamente se diseñan métodos generales conjuntistas y topológicos. Una razón es que las demostraciones ofrecidas en la sintaxis de la lógica elemental son psicológicamente opacas y por lo tanto en casos no triviales están fácilmente sujetas a error. Otra consiste en que no es una propuesta natural para estudiar la relación de los objetos que son el foco de la teoría con otros objetos relacionados; como un ejemplo, aun el teorema de representación numérica para órdenes simples no puede ser demostrado en el modo de primer orden. La completud de la lógica elemental es de algún interés conceptual, pero desde un punto de vista matemático práctico es inútil.

4.2. *Incompletud de la aritmética*

El resultado de incompletud más famoso se presenta en un nivel elemental, a saber, al nivel de la aritmética o de la teoría elemental de los números. En amplios términos conceptuales, el resultado de Gödel muestra que cualquier sistema formal cuyo lenguaje es lo suficientemente rico para representar un mínimo de aritmética es incompleto. Un resultado de incompletud más antiguo e históricamente importante fue el siguiente.

4.3. *Incompletud de construcciones geométricas*

Los tres problemas clásicos de construcción que los griegos antiguos no pudieron resolver por medios elementales fueron aquellos de trisectar un ángulo, duplicar un cubo y cuadrar un círculo. No fue sino hasta el siglo XIX que estas construcciones se mostraron ser imposibles de realizar por métodos elementales, con lo cual se estableció un resultado de incompletud conceptualmente importante para la geometría elemental.

4.4. *Incompletud de la teoría de conjuntos*

En la última parte del siglo XIX, sobre la base de la obra de Frege en una dirección y en la de Cantor en otra, pareció que la teoría de conjuntos o de clases era el marco natural dentro del cual construir el resto de las matemáticas. Las investigaciones en el siglo XX sobre los fundamentos de la teoría de los conjuntos, algunas recientes, han mostrado que hay un sentido perturbador de incompletud en la teoría de conjuntos, cuando se formula como una teoría de primer orden. La hipótesis del continuo así como el axioma de elección es independiente de otros principios de la teoría de conjuntos, y, como en el caso de la geometría, una variedad de teorías de conjuntos puede ser construida, al menos teorías de conjuntos de primer orden.

La hipótesis del continuo, por ejemplo, es decidible en teoría de conjuntos de segundo orden, pero no sabemos aún de qué manera, i. e., si como verdadera o como falsa. Así, claramente hay menos libertad para variación en la teoría de conjuntos de segundo orden, pero también en el presente hay mucha menos claridad sobre su estructura. Los resultados de estas varias investigaciones muestran inequívocamente que probablemente no es alcanzable la esperanza de alguna fundamentación simple y completa de las matemáticas.

4.5. *Teorías con formalización estándar*

El sentido lógico moderno de completud para teorías con formalización estándar, esto es, teorías formalizadas dentro de la lógica de primer orden, proporciona un concepto agudo y definido que no existía en el pasado. Recuerdo que la caracterización de completud en este contexto es el de que una teoría es completa si y sólo si todo enunciado de la teoría es válido en la teoría o inconsistente con ella —esto es, su negación es válida en la teoría—.

Detrás de esta noción lógica bien definida hay una larga historia de discusiones en la física que son más vagas y menos agudamente formuladas, pero que tienen un contenido intuitivo similar.

4.6. *El sentido de completud de Kant*

Aunque no hay tiempo aquí para examinar esta historia, vale la pena mencionar su máximo punto de expresión tal como se halla en

Los Fundamentos Metafísicos de la Ciencia Natural de Kant. La pretensión de Kant no es la completud de la física sino la completud de los fundamentos metafísicos de la física. Después de dar la razón de que es deseable separar principios heterogéneos para localizar errores y confusiones, da como la segunda razón el argumento que concierne a la completud.

> Puede servir como una segunda base para recomendar este procedimiento el hecho de que en todo lo que es llamado metafísica puede esperarse la absoluta completud de las ciencias, la cual es de tal tipo que no puede prometerse en ningún otro género de cognición; y por lo tanto, precisamente como en la metafísica de la naturaleza en general, igualmente aquí la completud de la metafísica de la naturaleza corpórea puede confiadamente esperarse...
>
> El esquema para la completud de un sistema metafísico, sea de la naturaleza en general o de la naturaleza corpórea en particular, es la tabla de las categorías. Porque no hay más conceptos puros de la razón que puedan concernir a la naturaleza de las cosas ([1970], pp. 10-11).

Escasamente es necesario decir que el argumento de Kant en términos de la tabla de las categorías remontamente satisface los estándares matemáticos del siglo XVIII, dejando a un lado los modernos. Su argumento en favor de la completud no fue sutil, pero su atención explícita en la cuestión de la completud fue importante y original.

4.7. *La teoría del campo unificado*

Después de Kant, hubo en física importantes edificaciones de sistemas durante el siglo XIX, y se intentó por Kelvin, Maxwell y otros, reducir los fenómenos físicos conocidos a modelos mecánicos; pero estos intentos no fueron tan imperialistas en espíritu como el de Kant. Puede argüirse, pienso, por considerar la teoría general de la relatividad de Einstein, especialmente el intento de una teoría del campo unificado, como el sucesor real de Kant en el intento de obtener completud. No quiero hacer muy cercano el paralelo entre Kant y Einstein, ya que para Einstein no puede sostenerse una concepción me-

tafísica *a priori* de los fundamentos de la física. Lo que ellos comparten es una fuerte búsqueda de la completud de la teoría. El objetivo de Einstein fue encontrar una teoría del campo unificado definiendo una estructura común de la cual pudieran derivarse todas las fuerzas de la naturaleza. En la gran versión del esquema, para condiciones límites dadas, las ecuaciones diferenciales tendrían una solución única para el universo entero, y todos los fenómenos físicos serían abarcados por la teoría. La geometrodinámica de John Wheeler y sus colaboradores es la versión más reciente de la visión de Einstein. Wheeler, especialmente formula el problema de una manera reminiscente de Descartes: «¿Son los campos y las partículas extrañas entidades inmersas *en* la geometría o son ellas nada más *sino* geometría?» ([1962], p. 361).

Si el programa de Einstein y el programa posterior de Wheeler hubieran sido llevados a cabo, mi defensa del escepticismo hacia el problema de la completud en las ciencias empíricas tendría que retraerse de vigorosas aserciones acerca de una inevitable incompletud. Sin embargo, me parece que hay, al menos en el temperamento científico corriente, soporte total para la tesis de la incompletud. Las grandes construcciones de teorías corrientemente han pasado de moda en campos tan distantes como la física y la sociología, y parece ser que hay una profunda apreciación de los problemas de, incluso, asentar, de cualquier manera definitiva, las leyes fundamentales de fenómenos complejos.

Como muestran los ejemplos que he mencionado —y muchos otros que no he considerado— en la mayoría de las áreas del conocimiento esperar teorías que tengan una fuerte forma de completud es esperar demasiado. Con lo que hemos aprendido a vivir es con una práctica de una forma apropiada de completud, pero no hemos construido esta práctica vigente explícitamente en nuestra filosofía. De nuestros varios ejemplos es patente que pueden esperarse formas débiles de completud para teorías acerca de áreas restringidas de la experiencia. A diferencia, parece ser completamente inapropiado, y en muchas maneras absurdo, esperar de teorías que cubran amplias áreas de la experiencia o, en los casos más grandiosos *toda* la experiencia, que tengan un fuerte grado de completud.

La aplicación de teorías científicas vigentes a áreas particulares de la experiencia casi siempre es esquemática y de carácter altamente aproximativo. Sea que estemos prediciendo el comportamiento de partículas elementales, el tiempo atmosférico, o tazas internacionales

—de hecho, cualquier fenómeno que tiene un alto grado de complejidad— podemos tener la esperanza solamente de abarcar una parte restringida del fenómeno.

Algunas veces se dice que el papel de la experimentación es precisamente aislar fragmentos particulares de la experiencia que pueden ser tratados de una manera relativamente completa. Esto es, pienso, más un dogma de filósofos quienes no se han ocupado mucho en experimentación que lo que es la práctica de los científicos experimentales. Cuando me he visto envuelto en experimentación me he dado cuenta de cómo mis concepciones esquemáticas de las teorías también se aplican al trabajo experimental. Primero se abstrae y simplifica una cosa concreta, y después otra, para hacer que los datos se adecuen dentro del conjunto limitado de los conceptos de la teoría puesta a prueba[2].

Pongámoslo de otra manera. Una concepción común de la ciencia es que ésta consiste en una aproximación siempre más cercana a un conjunto de verdades eternas que tienen validez siempre y en todo lugar. Esta concepción puede trazarse desde Platón a través de Aristóteles, y hacia adelante hasta Descartes, Kant y filósofos más recientes, y sin duda, esta explicación de la ciencia ha sido aceptada también por muchos científicos. Mi propia concepción es que puede hacerse una argumentación mucho mejor a favor de una concepción instrumentalista establecida en términos generales por Peirce, Dewey y sus sucesores. En esta concepción, la actividad científica es una actividad perpetua de resolución de problemas. Ninguna área de la experiencia está total y completamente establecida como para proveer un conjunto de verdades básicas; sino más bien, continuamente nos enfrentamos a nuevos problemas y situaciones, y llevamos a esos problemas y situaciones un popurrí de métodos, técnicas y conceptos científicos, que en muchos casos hemos aprendido a usar con gran facilidad.

En tal concepción de la ciencia, el concepto de verdad objetiva no desaparece directamente, pero lo que podríamos llamar la concepción cosmológica o global de la verdad es vista con escepticismo precisamente como lo es una concepción global o cosmológica de la completud. Como nuestras propias vidas y entornos, las teorías científicas son locales y están diseñadas para satisfacer un conjunto dado de

[2] Esta idea es desarrollada con detalle en Suppes (1962), capítulo 9 de esta Antología.

problemas. En la medida en que nuevos problemas surgen, se requieren nuevas teorías, y en casi todos los casos, las teorías usadas para el viejo conjunto de problemas no han sido puestas a prueba en la mayor medida factible ni han sido confirmadas tan amplia o profundamente como es posible, pero el tiempo ha madurado para algo nuevo, y nosotros vamos a algo más. De nuevo, esta concepción de la ciencia no significa que no puede haber corrección continua de una secuencia de teorías que satisfacen una secuencia particular de problemas; y esto no apremia a que necesariamente la secuencia no converge. De hecho, para expresar el tipo de completud en que estoy pensando, podemos hacer la fuerte suposición de que en muchos dominios de la experiencia, las teorías científicas que reemplazan a las mejores teorías viejas significan siempre un avance y, por lo tanto, tenemos un tipo de secuencia monótona creciente. Sin embargo, como es el caso de una secuencia monótona creciente de enteros, no hay convergencia a un valor finito —la secuencia nunca es completa— y así sucede con las teorías científicas. No hay un resultado límite al que convergemos o el cual podemos esperar alcanzar alguna vez. El conocimiento científico como el resto de nuestro conocimiento permanecerá por siempre pluralista y de carácter altamente esquemático.

Capítulo 6

EL PAPEL DE LOS METODOS FORMALES EN LA FILOSOFIA DE LA CIENCIA*

1. El fin del imperialismo

En el período que transcurre desde Frege hasta el Círculo de Viena y Carnap, una perspectiva fuertemente reduccionista mantuvo el poder en la filosofía de la ciencia. Los problemas significativos deberían ser reducidos a problemas que pudieran ser formalizados dentro de la lógica. Aquéllos que no podían ser tratados de esta manera, deberían ser desechados como si fueran demasiado vagos para merecer interés. Esta descripción es algo así como una caricatura pero no convertiré esto en una genuina descripción histórica. Es demasiado familiar para todos nosotros como para ser narrada nuevamente aquí. Mi punto es, más bien, enfatizar que tal perspectiva reduccionista del lugar de los métodos formales en la filosofía de la ciencia está ahora extinguida. En todo caso, enfrentamos corrientemente un nuevo imperialismo de métodos históricos, pero soy dubitativo respecto de que nos desplacemos hacia algo así como una posición reduccionista

---

* Publicado originalmente en P. D. Asquith y H. E. Kyburg (eds.), *Current research in the Philosophy of Science*, East Lansing, Mich., Philosophy of Science Association, 1979, pp. 16-27. Versión castellana de Carlos Lungarzo Melcón.

hegeliana, en el sentido de que todos los problemas son en última instancia de naturaleza histórica.

La presente perspectiva pluralista y esquemática de la filosofía de la ciencia tiene el peligro de una falta de disciplina intelectual. Puede decirse muy fácilmente que cualquier clase de método es apropiado, pero en la mayor parte de las áreas de la ciencia, así como en la filosofía de la ciencia, ninguna teoría fundamental amplia parece alcanzable. Para el futuro predecible nos habremos de enfrentar con una amplia variedad de métodos y problemas. Sin embargo, estoy anunciando la tesis de una forma más débil que la que estoy preparado a afirmar. La ausencia de una teoría fundamental dominando un área dada de la ciencia o de la filosofía de la ciencia constituye un estado de cosas saludable y normal. Es sólo durante ciertos períodos de aberración, que parecemos tener una teoría fundamental que está totalmente próxima a resultar satisfactoria en relación con los problemas y datos que confrontamos. Ptolomeo tuvo una teoría de éstas cuando estaba floreciendo en Alejandría, y ése fue el caso de Kepler cuando reescribió las suposiciones fundamentales de la astronomía y, más tarde, cuando Newton reescribió éstas nuevamente. Otros ejemplos de la hegemonía de teorías fundamentales singulares se pueden extraer, dados ciertos períodos de la química, quizá recientemente de ciertas partes de la biología molecular, y aun, probablemente, por un corto tiempo, de la economía. No obstante, en mi concepción, desde la segunda guerra mundial, los motores del empirismo han rebasado vastamente al carruaje jalado a caballo de la teoría. Los hechos que se han acumulado, simplemente han abrumado a la teoría en casi todas las áreas. El espectro de problemas que han sido planteados ha excedido la capacidad de la teoría para manejarlos, y ahora nos encontramos en la mayor parte de los dominios científicos, en un estado feliz de enfoques esquemáticos y pluralistas a la mayor parte de los problemas. Los físicos de altas energías todavía gustan de anunciar que con apenas otro orden de magnitud de aumento en las energías disponibles, llegaremos finalmente a los últimos componentes del universo. La mayoría de las personas ajenas a este campo, quienes han seguido tales repetitivas declaraciones durante las dos últimas décadas, difícilmente pueden mostrarse de otra manera que no sea escéptica, y maravillarse ante esta postrera expresión de ingenuidad filosófica.

También es digno de mencionar que al mismo tiempo, los métodos históricos se han convertido crecientemente en importantes en la

filosofía de la ciencia, los métodos formales están cobrando una importancia comparable en historia. Algunos ejemplos de investigación cuantitativa en historia se pueden encontrar en el volumen editado por Aydelotte, Bogue y Fogel (1971). Ejemplos técnicamente más sofisticados abundan en la restricta área de la historia económica.

Quizá uno de los mejores ejemplos de la decadencia de la hegemonía teórica está en la psicología. Durante los 40 y buena parte de los 50, el conductismo fue el punto de vista dominante y la fuerza organizadora, desde el punto de vista metodológico, en todas las partes de la psicología considerada fundamental o básica, por un gran número de psicólogos americanos. (La situación fue algo diferente en Europa, pero la psicología experimental es la más americana de todas las disciplinas científicas y, por ello, no trataré de hacer comentarios sobre el escenario europeo.) El fin simbólico de esta hegemonía fue la famosa reseña de Chomsky (1959) del libro de Skinner sobre comportamiento verbal (1977), pero el ataque del conductismo continuó en la mitad de los 60, y es sólo en la década actual que la naturaleza profunda del desarreglo teórico en psicología se ha vuelto tan evidente. Es una conjetura mía, a lo largo de las líneas en las cuales ya he hablado en general, que la variedad de empresas teóricas separadas que están floreciendo actualmente en psicología, no serán reemplazadas en el futuro por una única disciplina unificadora. Observando retrospectivamente, es evidente que las pretensiones de la psicología teórica tal como están ejemplificadas en el trabajo de Clark Hull de las décadas de los 30 y 40, son intelectualmente tan absurdas como las pretensiones de Kant de establecer una fundamentación *a priori* de la ciencia natural; en verdad, la mayoría de los filósofos encontraría a Kant más razonable, pero en ese caso pienso que esto se debe a que ellos no ven frecuentemente sus argumentos detallados como, por ejemplo, en los *Fundamentos metafísicos de la ciencia natural,* sino a las concepciones más generales, y por lo tanto, menos absurdas que se encuentran en la *Crítica de la razón pura.*

Uno de los puntos que deseo remarcar en estas observaciones sobre el pluralismo de teorías es que, así como en el pasado, los físicos han estado dominados por la búsqueda de los componentes y la teoría últimos, así también los filósofos de la ciencia han buscado certeza y completud de los fundamentos teóricos de la ciencia. Esta búsqueda recorre todo el camino, desde las concepciones aristotélicas sobre la demostración en los *Analíticos posteriores* hasta Carnap en la estructura lógica del mundo. El ocaso de esta larga búsqueda de una

base sólida no significa el final de la relevancia de los métodos formales para la filosofía de la ciencia, sino más bien el comienzo de una nueva era de realismo sobre sus limitaciones así como sobre su potencialidad.

El resto de este artículo se dedica a expandir este último punto. En la siguiente sección, discuto la variedad de métodos formales que parecen apropiados en la filosofía de la ciencia. La sección posterior se refiere a un estudio descriptivo de algunos de los problemas abiertos en la filosofía de la ciencia, en el análisis de los cuales parecen apropiados los métodos formales.

2. Variedad de métodos formales

El tema de mis observaciones es, como antes, de naturaleza pluralista. Comienza con el punto de que no hay acuerdo sobre la metodología formal que debe ser usada en la filosofía de la ciencia: tenemos disponible una variedad de métodos apropiados. Ya no es más un problema filosóficamente interesante la búsqueda de una única metodología.

Hay al menos cuatro métodos que tienen cierta relevancia; dos de ellos han sido prominentes en la última mitad del siglo. Los cuatro que tengo en mente son: formalización en lógica de primer o segundo orden (extensional o intensional), formalización dentro de la teoría de conjuntos, el enfoque de procedimientos característico de la computación, y el enfoque del rigor formal, apoyado vivamente por Georg Kreisel en varias ocasiones. Hablando en sentido amplio, todos esos métodos están caracterizados por alguna forma de enfoque matemático a los problemas en filosofía de la ciencia. No es mi tesis argumentar que todos estos problemas pueden ser encuadrados en el marco conceptual de uno de estos enfoques formales, pero me resisto fuertemente a la concepción de que la mayor parte de los problemas de interés caen fuera de tales métodos. Hay, desde luego, algunos filósofos que tienen ahora una orientación histórica tan fuerte hacia problemas de fundamentación de la ciencia, que existe escepticismo acerca del uso de métodos formales en cualquier problema que sea significativo. Desde mi punto de vista ésta es una moda pasajera que está equivocada. Una filosofía de la ciencia adecuadamente balanceada, compatibilizará ambos métodos, el formal y el histórico y, en verdad, algunos de los problemas más sofisticados en la histo-

ria de la ciencia, pueden bien ser enfocados desde un punto de vista formal. Algunas afirmaciones acerca de las revoluciones científicas, por ejemplo, parecerían requerir de análisis estadísticos y cuantitativos de datos, si es que han de tomarse como pretensiones serias que tengan el mismo status que otras afirmaciones acerca de fenómenos naturales o sociales.

De los cuatro métodos de formalización que he mencionado, ciertamente la formalización lógica es el que ha recibido mayor atención por parte de los filósofos, y aquellos quienes no están muy versados en ciencia, frecuentemente tienden a pensar que éste es el único tipo de formalización. Muchos resultados interesantes han sido logrados con tales métodos. Quizá es aún más importante que la familiaridad ampliamente extendida y casi universal entre los filósofos de la ciencia con los conceptos de la lógica formal elemental, ha proporcionado un útil marco conceptual común para la discusión de una gran variedad de problemas.

Por otro lado, he enfatizado en numerosas publicaciones durante muchos años las limitaciones de tal formalización, a causa de la riqueza de la estructura característica de las teorías científicas más desarrolladas. He bautizado esta actitud mía como «axiomatizar una teoría científica es definir un predicado conjuntista». Continúo pensando que tales métodos conjuntistas son apropiados para una amplia variedad de problemas en la filosofía de la ciencia, y he tratado de concretar esta perspectiva en varios artículos proporcionando un buen número de ejemplos. Tales métodos conjuntistas no son tan ampliamente usados en filosofía de la ciencia como los métodos de la lógica formal, pero ellos son ciertamente mejor conocidos y más ampliamente aceptados que los dos últimos métodos que he mencionado.

El enfoque de procedimientos, característico de las ciencias de la computación, está ganando justamente divulgación en filosofía de la ciencia. Es casi cierto que la búsqueda de métodos de procedimientos o computacionales será de importancia considerablemente mayor que la extensión posterior de los métodos conjuntistas en el desarrollo de las teorías psicológicas fundamentales de la cognición, el aprendizaje y la percepción. Más generalmente, los enfoques de procedimientos probablemente lleguen a ser de mayor importancia, teóricamente hablando, en la filosofía de las ciencias sociales de lo que son ahora. Debido al extendido uso de métodos computacionales por la mayor parte de los científicos sociales orientados empíricamente, pa-

rece probable que muchos desarrollos teóricos futuros dependerán del uso de ideas computacionales más que de conceptos conjuntistas, a los fines de su formalización. Desde luego, tales formalizaciones fuera de la teoría de conjuntos, ya son familiares en partes constructivas de los fundamentos de la matemática, pero su uso en ciencia, en oposición a lo que sucede en matemáticas, tendrá un sabor diferente a causa de la extensa orientación computacional de los métodos.

Quiero también mencionar la conjetura de que los métodos de procedimientos se transformarán en especialmente importantes en el desarrollo de una teoría apropiada del significado y de la comprensión para el lenguaje natural. Un ejemplo que no sería aceptado por mucha gente es la propuesta de que el significado de un nombre propio puede ser considerado como el conjunto de los procedimientos internos por los cuales el individuo que utiliza o reconoce el nombre propio, atribuye propiedades y relaciones al objeto denotado por el nombre propio. Estos procedimientos o programas internos a un usuario del lenguaje particular son privados y, en determinados aspectos, son idiosincráticos. La noción apropiada para una teoría pública del significado es una noción de equivalencia o congruencia de programas o procedimientos, que es considerablemente más débil que este sentido muy fuerte de programa individual idiosincrático. Si este punto de vista es absolutamente correcto, la búsqueda de un sentido duro y rápido de identidad de significado es errada; se oculta en el programa interno de cada individuo y es una noción de interés científico limitado. Aquello de lo cual andamos atrás, es la congruencia de procedimientos que pueda destruir estas características privadas a través de los usuarios del lenguaje, pero proporcionar una noción de significado que sea pública y estable.

Planteado todavía de otra manera, los enfoques de procedimientos constituyen un método natural para incorporar ideas intensionales y constructivas dentro del mismo marco conceptual de referencia. Por esta razón especialmente podría parecer que tienen un muy considerable futuro como un método apropiado de formalización en la filosofía de la ciencia.

La vivaz defensa de Kreisel del rigor informal (ver especialmente su artículo [1967]), ha sido dirigida a las concepciones de fundamentación de la matemática exageradamente positivistas y formalistas, y más bien en poca medida a la filosofía de la ciencia. Sus puntos de vista son una propedéutica adecuada a aquellos que han sido demasiado entusiastas acerca del formalismo y no suficientemente atentos

a las necesidades de ideas informales e intuitivas de naturaleza definida sobre un tema, de tal modo de tener ideas significativas sobre él. En mi propia perspectiva, algunos de los análisis ofrecidos de la noción de causalidad en filosofía de la ciencia, están afectados de una carencia de rigor informal, es decir, de una falta de atención seria a los ejemplos científicos detallados y la confrontación de ideas formales propuestas con una variedad de resultados sistemáticos intuitivos. Kreisel me ha señalado en varias conversaciones que el uso de los métodos conjuntistas en la filosofía de la ciencia es realmente un ejemplo de rigor informal, porque lo que está siendo usado es la noción intuitiva de conjunto y no una teoría axiomatizada dentro de la lógica de primer orden.

3. Variedad de problemas abiertos

He dividido esta discusión de problemas abiertos para los cuales son relevantes los métodos formales en tres partes, una que trata de teorías, otra de metodología y una con problemas de evidencia experimental.

Teorías

El desarrollo histórico de la física está siendo investigado de manera fascinante por historiadores de la ciencia y filósofos de la ciencia que utilizan un enfoque histórico. Todos nosotros aprenderemos mucho de este trabajo, sea si nos concentamos en la historia de la astronomía antigua de Neugebauer (1975), en los trabajos corrientes relativos a la historia de la mecánica cuántica, o en cualquier período intermedio. Aunque yo sea un fuerte defensor de los métodos formales, también soy un inveterado lector que ha aprendido mucho de una variedad de trabajos históricamente orientados. Mis propias perspectivas generalmente escépticas acerca de tener cierto conocimiento de naturaleza clara y definida sobre cualquier fenómeno complejo, ha sido muy reforzada por el escepticismo de Neugebauer concerniente a la posibilidad de rastrear de alguna manera influencias causales en historia de la ciencia.

Pero el estudio histórico de las disciplinas científicas fundamentales es, deseo insistir nuevamente, no la narración entera para la fi-

losofía de la ciencia. Hay muchas cuestiones de gran interés filosófico que no son más históricas que el correspondiente desarrollo de una nueva ciencia. Todo trabajo tal, desde luego, sería propiamente histórico, al poner atención en detalles técnicos en el trabajo precedente que es relevante. Pero no es esto lo que quiero decir al hablar de estudios históricamente orientados, y sólo lo menciono porque ha existido una tendencia en la filosofía de la ciencia a escribir acerca de ciertos temas, sin una atención anterior al trabajo serio previo. Uno de mis propios ejemplos favoritos de la perspectiva de que la ignorancia es mejor, es el trabajo de Norman Campbell sobre la teoría de la medición el cual refleja una falta de familiaridad seria con el trabajo más profundo y sofisticado de Helmholtz y Hölder.

En aquellos dominios de la física que son adecuadamente considerados como de interés filosófico fundamental, el número de problemas formales de interés fundamentacional es demasiado grande para ser enumerado aquí. Es fácil dar una larga lista de problemas formales abiertos en mecánica cuántica solamente, la más importante de las teorías científicas empíricas de este siglo. Estamos, sin embargo, muy lejos de entender el papel de la probabilidad en la mecánica cuántica. A un nivel aún más general, existe todavía disputa sobre si la formalización final de la mecánica cuántica debería depender de una lógica cuántica especial no típica. El papel de la teoría de la medición y la teoría explícita del observador es también todavía un motivo de controversia, y es uno cuya clarificación reposa sobre un gran número de problemas significativos de construcción de teorías.

Se piensa a veces que el uso de métodos formales o axiomáticos en el estudio de tales problemas es demasiado ajeno al trabajo de los físicos mismos, y debería ser considerado como un nuevo género de escolástica, introducida por filósofos que buscan aglomerar nuevos ángeles en nuevos alfileres.

Sin entrar en una discusión dialéctica de este asunto, quiero citar una pieza significativa de evidencia en contra; el parágrafo introductorio del bien conocido libro sobre la teoría axiomática del campo cuántico de Bogolubov *et al* (1975), acerca del lugar del enfoque axiomático en física:

> Se cree ampliamente que la axiomatización es un tipo de refinamiento que se aplica a una área de la ciencia después de que ella ha sido completada para todos los propósitos prácticos. Esto no es cierto, incluso en la matemática pura. Es bien ad-

> mitido que la axiomatización moderna de la aritmética y la geometría euclideana marcó el complementamiento de estas disciplinas (aunque al mismo tiempo, estimuló una nueva ciencia: la lógica matemática o metamatemática). Para la mayor parte de las áreas de la matemática, sin embargo, tales como el análisis funcional, la axiomatización es un método fundamental de exploración, un punto de partida. (Desde luego, el sistema de axiomas puede ser modificado, a medida que el tema de estudio evoluciona.) En física teórica, desde la época de Newton, el método axiomático ha servido no sólo para la sistematización de resultados previamente obtenidos, sino también en el descubrimiento de nuevos resultados. (p. 1).

Menciono como ejemplos otras dos áreas de la ciencia en las cuales existen problemas abiertos para los cuales los métodos formales son adecuados, y ambos, el análisis y los resultados, serían de interés filosófico.

Uno concierne a la noción de causalidad en el trabajo de los economistas-matemáticos y econometristas modernos. Hay una literatura técnica creciente sobre el uso de nociones causales en economía, especialmente entreveradas con una variedad de métodos estadísticos detallados para el análisis de datos económicos. En alguna medida, los métodos son matemáticamente intrincados y relativamente sofisticados, a causa de la ausencia de posibilidad de experimentación en economía. Métodos analíticos más poderosos son los que se requieren para realizar una identificación firme de los fenómenos causales. Hasta donde yo sé, no ha habido realmente un análisis formal completo desde el punto de vista de la filosofía de la ciencia en esta frondosa literatura económica (un comienzo puede encontrarse en Suppes (1970). Creo que nosotros, como filósofos, podríamos ponerla en mucho de esta literatura, y al mismo tiempo podríamos aprender una perspectiva filosófica que podría contribuir también en algo. Un ejemplo simple pero técnicamente elegante de esta literatura puede encontrarse en la demostración de Hosoya (1977) de la equivalencia general de la condición de Granger (1967) para la no causalidad y la condición de Sims (1972). Es mi impresión que la economía es casi la única ciencia actual en la cual uno puede encontrar discusiones técnicas de causalidad que no conduzcan a la auto-confusión y que estén planteadas en términos generales y con un desarrollo teórico cuidadoso de conceptos. (Excluyo en esta nota el uso de principios de

causalidad en física, que se refieren esencialmente sólo a la precedencia en el tiempo.)

Como segundo ejemplo menciono el clásico problema de mente-cuerpo en el nuevo estilo de *software** y su independencia con *hardware*. No se necesita ir muy lejos en la ciencia de la neurología ordinaria para darse cuenta de que estamos probablemente más lejos de entender cómo trabaja la mente a nivel neuronal de lo que alguna vez pensamos que podríamos estar en este punto del tiempo, digamos, hace 30 ó 40 años. Cuanto más trabajo se hace, más se profundiza el misterio, y ahora parece que es un problema formal razonable para la psicología el establecer bajo las suposiciones más razonables y débiles posibles, la imposibilidad de reducir fenómenos complejos a fenómenos neurofisiológicos. Aquí la analogía estriba en que desde una inspección de los computadores se puede decir muy poco acerca del tipo de *software* que debería ser escrito para ellos, y si fuera enfocado el problema, una vez que el programa es codificado, de manera puramente física, no tengo dudas de que seríamos incapaces inclusive de descubrir qué programa es. Existe aún algún escepticismo de que un gran sistema operante, codificado en dígitos binarios, pudiera ser plenamente comprendido, si no se proporcionaran directivas cognoscitivas externas. En cualquier caso, la relación entre cerebro y mente es mucho peor porque conocemos demasiado poco acerca de las bases físicas detalladas para codificar eventos mentales complejos. Podría ser interesante formular una variedad de teoremas sobre la imposibilidad de la reducción de la mente al cerebro. Tales teoremas jugarían el mismo papel en psicología que los teoremas de imposibilidad sobre variables ocultas juegan en la mecánica cuántica. La prosecución rigurosa de los detalles proporcionaría esclarecimiento y nos daría nuevas ideas acerca de cómo formular los conceptos de la psicología en una manera que es propiamente independiente de la neurofisiología. (Una discusión algo más detallada de estos asuntos puede encontrarse en Suppes [1975].)

---

* No traduzco los términos *software* y *hardware* por el hecho de tener un significado típico propio del lenguaje técnico de los computólogos y que se usan sin traducción en todos los idiomas.

Metodologías

Las dos décadas transcurridas desde 1945 hasta 1965 han estado marcadas por una expansión más rápida del trabajo en estadística matemática que en cualquier otro período de la historia. Fue en esta época en que las ideas del tipo teoría de la decisión se convirtieron en el centro de una buena parte de la literatura teórica en estadística. La expansión de la estadística aplicada en las ciencias empíricas ha sido también muy acusada en el período posterior a la segunda guerra mundial que en cualquier otra época.

Al menos hasta digamos tiempos recientes, estos desarrollos en estadística matemática tanto al nivel teórico como al aplicado, han sido ampliamente ignorados por los filósofos, aun por aquellos interesados en los fundamentos de la probabilidad y la inducción.

Parte de la razón de esta separación entre la literatura filosófica y la estadística sobre los fundamentos de la inducción ha sido el desarrollo de una tendencia separada de trabajo por parte de los filósofos, generalmente rotulada *teoría de la confirmación*. Un rasgo característico de la teoría de la confirmación ha sido su uso de métodos formales particulares, primariamente aquellos de la lógica elemental. Como consecuencia, ha sido difícil hacer contacto con la maquinaria más elaborada y matemáticamente más técnica de la estadística matemática. Recientemente, esta situación ha comenzado a cambiar y existe ahora un número creciente de filósofos adquiriendo conocimientos acerca de los fundamentos de la estadística.

Me gustaría mencionar brevemente algunos de los problemas de la metodología estadística de gran importancia en el trabajo aplicado que todavía no han recibido soluciones definitivas. Estos son problemas de interés filosófico obvio, e ilustran el importante papel de los métodos formales en los fundamentos de la probabilidad y la inducción. Primero, ha habido en la última década y media un nuevo y extenso cuerpo de trabajo en el concepto de aleatoriedad. En manos de Martin Löf y otros, este concepto ha comenzado ahora a tener implicaciones para la teoría de la estadística así como para la probabilidad. Un problema relacionado es el problema bayesiano de la justificación de procedimientos de muestreo aleatorio. El análisis formal y axiomático de las bases para el muestreo aleatorio continúa siendo un problema prominente y uno que merece consideración filosófica. Más generalmente, la teoría de las muestras finitas y la admisibilidad o inadmisibilidad del concepto de población infinita des-

de la cual se extraen las muestras necesitan un análisis ulterior. Ciertamente los bayesianos finitistas no serían proclives a admitir la apropiabilidad del concepto de población infinita, pero el concepto, por otro lado, tiene una larga historia de uso y desarrollo en la teoría estadística objetiva.

La teoría del diseño experimental ha tenido un desarrollo técnico intenso desde la segunda guerra mundial, pero los principios fundamentacionales están todavía en un estado insatisfactorio. El reciente vendanal de interés en estadística bayesiana no ha producido, sin embargo, una teoría bayesiana satisfactoria del diseño experimental. La literatura fundamentacional que deriva de De Finetti ha hecho hasta ahora un contacto demasiado magro con los problemas técnicos del diseño. Casi ciertamente, el principio de intercambiabilidad, cuya importancia fue enfatizada por De Finetti desde los tardíos años 20 jugarían un papel prominente en los fundamentos de los conceptos bayesianos relevantes, pero permanece mucho todavía por hacer para poner en funcionamiento la teoría formal.

Esta última mención del papel del principio de intercambiabilidad proporciona una oportunidad para remarcar un punto que está implícito en lo que ya he dicho. No veo bases para extraer una nítida separación entre el trabajo que debe ser hecho por filósofos interesados en estos problemas y estadistólogos con intereses similares. Existe una superposición necesaria y hasta deseable. Esto no significa que los filósofos deban convertirse en estadistólogos matemáticos profesionales para llevar adelante problemas de fundamentos de la estadística, pero sí significa, como en el caso de la filosofía de la ciencia en otras áreas como, por ejemplo, la filosofía de la mecánica cuántica, que el conocimiento detallado del trabajo científico relevante es un marco de referencia necesario para el análisis estadístico informado. Lo que debería urgir tan fuertemente como sea posible es que los filósofos mezclen sus propios métodos formales con aquellos de los estadistólogos, para concentrarse en los problemas conceptuales de interés. En este panorama de problemas necesariamente superficial, he mencionado especialmente problemas de aleatoriedad, de muestreo y de diseño experimental, debido a que son justamente esos problemas los de central importancia en los fundamentos conceptuales de la estadística que han recibido un análisis muy inadecuado en la literatura filosófica sobre probabilidad e inducción.

Problemas de evidencia experimental

Durante un largo tiempo me he preocupado por los modelos formales de datos (1962). Todavía estoy convencido que la filosofía de la ciencia tiene una contribución significativa por hacer a la teoría de cómo la evidencia experimental es usada para confirmar o evaluar las teorías científicas. Obviamente, una variedad de problemas que aparecen en este contexto son, antes que nada, de carácter estadístico y deberían ser tratados propiamente bajo el encabezado de metodologías, tal como ha sido discutido antes. Sin embargo, un examen sumario de la literatura experimental en cualquier parte desarrollada de la ciencia pone en claro que hay una plétora de problemas sobre la relación entre evidencia y teoría que no son estadísticos por naturaleza, y que sí necesitan un análisis sistemático.

Un trabajo de análisis formal que he intentado alentar a emprender a varios de mis estudiantes, pero todavía sin gran éxito, es el análisis detallado de la relación entre la evidencia experimental de mayor relevancia que apoya la mecánica cuántica y la teoría propiamente dicha. No hay, hasta donde yo sé, lugar alguno que presente de manera sistemática la evidencia que apoya la teoría clásica de una manera metodológicamente meticulosa. En verdad, la práctica usual en los manuales y tratados sobre mecánica cuántica clásica no es presentar evidencia experimental, en ninguna forma que pueda considerarse seria en absoluto. Hace un par de años, quise determinar cuán bien la evidencia experimental apoyaba la afirmación de que la caída radiactiva obedece a una ley exponencial probabilística. Me sorprendió encontrar cuán difícil era localizar en la literatura un análisis estadístico detallado de este problema y cuánto estaba siendo despreciado aun en sus aspectos más superficiales en las discusiones estándar de la caída radiactiva. Este es, sin embargo, un caso simple. Los casos mucho más complicados de los datos experimentales centrales que apoyan la mecánica cuántica están en un status muy insatisfactorio desde un punto de vista sistemático y queda mucho por hacerse todavía.

En alguna medida una de las mejores tradiciones en este aspecto está en psicología, pero aun aquí la teoría formal de cómo la evidencia experimental se relaciona con la teoría no es tan explícita como debería. No deseo enfatizar el carácter formidable de los problemas de organizar de manera formal la relación entre evidencia experimental y teoría. En años recientes he intentado leer algo sobre la litera-

tura experimental reciente en física. Es casi como si hubiera decidido aprender un lenguaje extranjero. Aunque tengo una familiaridad razonable con ciertas áreas de discusión teórica en física, encuentro que la literatura experimental es una materia enteramente diferente. Las descripciones técnicas abreviadas de equipamiento, sus características funcionales y la descripción de los datos obtenidos, requieren un esfuerzo mayor de análisis para convertirse en conceptualmente independientes de la vasta literatura precedente sobre el mismo tópico. Y puedo entender ahora por qué mis amigos en el campo de la física me dicen que la literatura experimental en un área es casi ilegible aun para alguien que esté trabajando en un área próxima. No estoy proponiendo que los filósofos intenten reelaborar una gran parte de esta literatura; el trabajo es claramente imposible. Sería interesante poseer un análisis formal detallado de alguna área particular de significación filosófica, por ejemplo, experimentos recientes sobre teoría de variables ocultas, aunque no fuera más que para poner en evidencia cuán complicada es la relación entre teoría y experimento en aquellos dominios de la ciencia que están desarrollados. Las historias que obtenemos de las explicaciones formales en filosofía, que no están relacionadas con estos detalles, o las igualmente simplificadas narraciones que obtenemos de las explicaciones históricas del trabajo pasado en ciencia, cuando las temáticas eran técnicamente mucho menos complicadas, son susceptibles de conducir a error. Necesitamos un correctivo para ambos: para el excesivo énfasis en métodos formales puramente, de una parte, y para los métodos puramente históricos, de la otra; y ese correctivo provendría de un vistazo adecuado y detallado a los experimentos corrientes en las partes desarrolladas de la ciencia.

4. Observaciones finales sobre métodos históricos y formales

A través de toda esta conferencia, ha habido una tensión intelectual obvia entre aquellos que defienden los métodos históricos como el enfoque primario en filosofía de la ciencia y aquellos que predican los métodos formales. En sí misma, esta tensión es buena. Genera tanto un espíritu correcto de crítica y un sentido propio de perspectiva. Cada grupo puede decirle al otro acerca de su debilidad, y la prosecución de asuntos filosóficos puede ser entendida a un nivel más pro-

fundo. No hay peor destino para un método o teoría en desarrollo que el hecho de no poder ser confrontado con perspectivas opuestas que requieren un refinamiento de conceptos y un desarrollo detallado de argumentos. Por otro lado, no parece haber razón alguna para no encontrar lugar en la filosofía de la ciencia para una búsqueda vigorosa de ambos enfoques: histórico y formal.

Comparto con mis colegas más históricamente orientados una suerte de horror al pensamiento de una filosofía de la ciencia que se desarrolla por su propia cuenta, independientemente del rico material que ofrecen las ciencias mismas. Ya he mencionado algunos ejemplos de esta tendencia y me uno a ellos para alentar la búsqueda de problemas y de métodos que tengan una complejidad adecuada al trabajo real de las ciencias desarrolladas. Pero también quiero recordar a aquellos involucrados con los métodos históricos en la filosofía de la ciencia que cerca del noventa por ciento de todos los científicos quienes han vivido alguna vez, aún viven, y que el desarrollo de la ciencia desde la segunda guerra mundial es la más aplastante historia en la historia del pensamiento. Involucrarse sólo con la perspectiva histórica a largo plazo y no entender los detalles sistemáticos de la ciencia moderna es tan errado como la búsqueda de métodos formales vacíos que no tienen contacto alguno con las teorías científicas desarrolladas y los experimentos que las respaldan.

Mi intención es terminar con una observación pluralista: la de que hay trabajo interesante e importante más que suficiente para todos nosotros. La tiranía de cualquier enfoque parcial o de cualquier método único, sea formal o histórico, debería ser derrotada por la democracia de métodos que coaligará y separará en una pauta continuamente cambiante, en la medida en que los viejos problemas se extingan y otros nuevos aparezcan.

Capítulo 7

UNA COMPARACION DEL SIGNIFICADO Y LOS USOS DE LOS MODELOS EN LAS MATEMATICAS Y LAS CIENCIAS EMPIRICAS*

1. Significado

Considere las siguientes citas:

Una realización posible en la cual todos los enunciados válidos de una teoría T son satisfechos se llama un modelo de T (Tarski [1953], p. 11).

En los campos de la espectroscopia y la estructura atómica se dan alejamientos similares de la física clásica. Se ha venido acumulando una abrumadora masa de evidencia que muestra que el átomo consiste en un núcleo pesado, cargado positivamente, rodeado de electrones, similares a partículas, negativos. De acuerdo a la Ley de atracción de Coulomb entre cargas eléctricas, un sistema tal colapsará alguna vez, a menos que los electrones giren alrededor del núcleo. Pero una carga girando emitirá radiación en virtud de sus aceleraciones. Así se provee de un mecanismo para la emisión de la luz.

Sin embargo, este mecanismo está completamente en desacuerdo

* Originalmente publicado en *Synthese* 12, 1960, pp. 287-301. Versión castellana de Mario Alberto Cortez Rodríguez.

con los datos experimentales. Las dos dificultades mayores son fáciles de ver. Primero, los átomos en el que los electrones giran continuamente deben emitir luz todo el tiempo. Experimentalmente, sin embargo, los átomos radian solamente cuando están en condiciones especiales de «excitación». Segundo, es imposible por medio de este modelo dar cuenta de la ocurrencia de las líneas del espectro de una frecuencia sola (más correctamente, de un estrecho rango de frecuencias). Los electrones radiantes de nuestro modelo perderán energía; como resultado no serán capaces ya de mantenerse a la distancia inicial de sus núcleos, sino caerán hacia al centro de atracción, cambiando su frecuencia de revolución en la medida en que caen. Sus órbitas terminarán en espiral en el núcleo. Por la teoría electrodinámica, la frecuencia de la radiación emitida por la carga que gira es la misma que la frecuencia de revolución, y ya que ésta cambia, aquélla deberá cambiar también. Así nuestro modelo es incapaz de explicar la figura de las líneas del espectro (Lindsay y Margenau [1936], pp. 390-391).

El autor (Gibbs) no considera esta tarea como el establecimiento de las teorías físicas directamente, sino como la construcción de modelos mecánico-estadísticos que tendrán algunas analogías en termodinámica y algunas otras partes de la física; de ahí que él no dude en introducir algunas hipótesis muy especiales de carácter estadístico (Khinchin [1949], p. 4).

Así, el modelo de elección racional construido sobre comparaciones de pares no parece adecuarse bien al caso del comportamiento racional en la situación de juego descrita (Arrow [1951], p. 21).

Al construir los modelos asumiremos que cada variable es algún género de promedio o agregado para miembros del grupo. Por ejemplo, *D* podría ser medido localizando las opiniones de los miembros de los grupos sobre una escala, asignando números a las posiciones en la escala y calculando la desviación estándar de las opiniones de los miembros en términos de esos números. Incluso las variables intervinientes, aunque no directamente medidas, pueden pensarse como promedios de los valores para los miembros individuales (Simon [1957], p. 116).

Este trabajo sobre los modelos matemáticos de aprendizaje no ha intentado formalizar ningún sistema teórico particular del comportamiento; aunque las influencias de Guthrie y Hull son las más notorias. Comparados con los viejos intentos, el trabajo más reciente se ha ocupado de análisis detallados de los datos relevantes a los modelos y con el diseño de experimentos para poner a prueba directamen-

te predicciones cuantitativas de los modelos (Bush y Estes [1959], p. 3).

Describiré... varios criterios usados al adoptarse un modelo matemático de un proceso estocástico observado... Por ejemplo, considérese el número de carros que han pasado en un punto durante el tiempo t. La primera hipótesis es una hipótesis típicamente matemática, sugerida por los hechos y que sirve para simplificar las matemáticas. La hipótesis es que el proceso estocástico del modelo tiene incrementos independientes... La siguiente hipótesis, la de los incrementos estacionarios, establece que, si $s < t$, la distribución de $x(t) - x(s)$ depende sólo de la longitud del intervalo temporal $t - s$. Esta hipótesis significa que no podemos dejar que el tiempo corra en las horas relajadas o agolpadas. La intensidad del tráfico debe ser constante.

La siguiente hipótesis consiste en que los sucesos ocurren una sola vez. Esta hipótesis es la menos natural a un matemático. Porque de la precisión limitada de las mediciones no dice nada a un observador... La siguiente hipótesis es de un género más cuantitativo, la cual es también natural para cualquiera que ha visto el teorema de Taylor. Consiste en que la probabilidad de que al menos un carro pase en un intervalo temporal de longitud h debe ser $ch + o(h)$ (Doob [1960], p. 27).

La primera de estas citas ha sido tomada de un libro de lógica matemática, las dos siguientes de libros de física, las tres siguientes de trabajos sobre ciencias sociales y la última de un artículo de estadística matemática. Podrían coleccionarse fácilmente usos adicionales de la palabra «modelo» en otro lote de citas. Uno de los sentidos más prominentes de la palabra olvidado en las citas anteriores es el uso muy común en física e ingeniería de «modelo» para significar un modelo físico actual como, por ejemplo, en las frases «el modelo del aeroplano» y «el modelo del barco».

Bien puede pensarse que es imposible poner bajo un concepto los varios usos de la palabra «modelo» exhibidos por esas citas. Creo que sería demasiado pretender que la palabra «modelo» ha sido usada en exactamente el mismo sentido en todas ellas. La cita de Doob exhibe una tendencia muy común, a saber, confundir o mezclar lo que los lógicos llaman el modelo y la teoría del modelo. Es una práctica muy extendida en estadística matemática y en las ciencias del comportamiento usar la palabra «modelo» para significar el conjunto de suposiciones cuantitativas de la teoría, esto es, el conjunto de enunciados

que en un tratamiento preciso serían tomados como axiomas, o, si ellos mismos no son adecuadamente exactos, constituirían las bases intuitivas para formular un conjunto de axiomas. En este uso un modelo es una entidad lingüística y puede contrastarse con el uso caracterizado por la definición de Tarski, con la cual un modelo es una entidad no lingüística en la que una teoría es satisfecha.

También hay un cierto uso técnico en econometría de la palabra «modelo» que requiere ser notado. En el sentido de los econometristas, un modelo es una clase de modelos en el sentido del lógico, y lo que los lógicos llaman un modelo es llamado por los econometristas una *estructura*.

No me parece que haya dificultades serias. Pretendo que el concepto de modelo en el sentido de Tarski puede usarse sin distorsión y como un concepto fundamental en todas las disciplinas de las que las citas anteriores han sido extraídas. En este sentido, aseveraré que el significado del concepto de modelo es el mismo en matemáticas y en las ciencias empíricas. La diferencia que se encuentra en esas disciplinas se encuentra en sus usos del concepto. Al delinear esta comparación entre constancia de significado y diferencia de uso, no surgen las cuestiones semánticas, algunas veces difíciles, de cómo uno explica el significado de un concepto sin referencia a su uso. Cuando hablo del significado del concepto de modelo siempre hablaré en contextos técnicos bien definidos, y lo que aserto es que, dado este significado técnico del concepto de modelo, los matemáticos preguntan cierto tipo de cuestiones y los científicos empíricos tienden a preguntar otro tipo de cuestiones.

Tal vez sea útil defender esta tesis acerca del concepto de modelo analizando los usos de la palabra en las citas anteriores. Como ya fue indicado, la cita de Tarski representa una definición estándar de «modelo» en lógica matemática. Nuestras referencias a los modelos en matemáticas puras será, de hecho, tomadas de la lógica matemática, esa rama de las matemáticas puras explícitamente ocupada con la teoría de modelos. La noción técnica de realización posible usada en la definición de Tarski no necesita exponerse aquí. Hablando a grandes rasgos, una realización posible de una teoría es una entidad conjuntista del tipo lógico apropiado. Por ejemplo, una realización posible de la teoría de grupos es cualquier par ordenado cuyo primer miembro es un conjunto y cuyo segundo miembro es una operación binaria sobre este conjunto. La idea intuitiva de un modelo como una realización posible en que una teoría es satisfecha es igualmente familiar

en la literatura de la lógica matemática como para requerir recordarse. La distinción importante que necesitaremos es la de que una teoría es una entidad lingüística consistente de un conjunto de enunciados y los modelos son entidades no lingüísticas en que la teoría es satisfecha (una definición exacta de teoría tampoco es necesaria para nuestros usos aquí).

Consideraré que el uso de la noción de modelo en la cita de Lindsay y Margenau podría refundirse en esos términos de la siguiente manera. La teoría orbital del átomo es formulada como una teoría. La cuestión surge entonces, ¿una realización posible de esta teoría en términos de entidades definidas en estrecha conexión con experimentos constituye realmente un modelo de la teoría?, o puesta de una manera quizá más simple, ¿los modelos de una teoría orbital corresponden bien con los datos obtenidos de los experimentos físicos con fenómenos atómicos? Es verdad que muchos físicos desean pensar un modelo de la teoría orbital del atómo como siendo algo más que cierto tipo de entidad conjuntista. Ellos lo conciben como una cosa física muy concreta construida en analogía al sistema solar. Creo que es importante señalar que no hay una real incompatibilidad en esos dos puntos de vista. Definir formalmente un modelo como una entidad conjuntista que es cierto tipo de tupla ordenada consistente de un conjunto de objetos y relaciones y operaciones sobre esos objetos no es excluir el modelo físico del género al que apelan los físicos, porque el modelo físico puede simplemente tomarse para definir el conjunto de objetos en el modelo conjuntista. Debido a la importancia de esta cuestión será bueno ilustrarla con mayor detalle. Podemos axiomatizar la mecánica clásica de partículas en términos de cinco nociones primitivas de un conjunto P de partículas, un intervalo T de números reales correspondiente al tiempo transcurrido, una función posición s definida sobre el producto cartesiano del conjunto de las partículas y el intervalo temporal, una función masa m definida sobre el conjunto de las partículas y una función fuerza f definida sobre el producto cartesiano del conjunto de las partículas, el intervalo temporal y el conjunto de los enteros positivos (el conjunto de los enteros positivos entra en la definición de la función fuerza simplemente para proveer un método para nombrar a las fuerzas). Una realización posible de los axiomas de la mecánica clásica de partículas, es decir, de la teoría de la mecánica clásica de partículas es entonces una quintupla ordenada

$$X = \langle P, T, s, m, f \rangle.$$

Un modelo de la mecánica clásica de partículas es una quintupla ordenada tal. Es suficientemente simple ver cómo un modelo físico real en el sentido de los físicos de la mecánica clásica de partículas está relacionado a este sentido conjuntista de modelo. Simplemente podemos tomar el conjunto de las partículas como, en el caso del sistema solar, el conjunto de los cuerpos planetarios. Una posibilidad ligeramente más abstracta consiste en tomar el conjunto de las partículas como el conjunto de los centros de masa de los cuerpos planetarios. Esto generalmente ejemplifica la situación. El modelo conjuntista abstracto de una teoría tendrá entre sus partes un conjunto básico que consistirá en los objetos ordinariamente pensados como constituyentes del modelo físico (para una discusión de los fundamentos axiomáticos de la mecánica clásica de partículas con mayor detalle en las líneas recién sugeridas, véase Suppes [1957], cap. 12).

En el parágrafo precedente hemos usado las frases «modelo conjuntista» y «modelo físico». Podría parecer que no hay ningún caso en argüir acerca de cuál uso de la palabra «modelo» es primario o más apropiado en las ciencias empíricas. Mi opinión es que el uso conjuntista es el más fundamental. Los científicos con mente altamente física o empírica quienes pueden disentir de esta tesis y creer que la noción de un modelo físico es la cosa más importante en una rama dada de la ciencia física pueden todavía asentir con las consideraciones sistemáticas que estoy haciendo.

Una ilustración histórica de la cuestión son los esfuerzos de Kelvin y Maxwell para encontrar un modelo mecánico de los fenómenos electromagnéticos. Sin duda, ambos pensaron en posibles modelos en un sentido físico literal, pero no es difícil refundir sus memorias publicadas sobre este tópico en una búsqueda por modelos conjuntistas de la teoría de la mecánica del continuo que explicara los fenómenos electromagnéticos observados. Más aún, es realmente la parte formal de sus memorias la que ha tenido un valor permanente. Ultimamente, es la teoría matemática de Maxwell la que se ha probado ser importante, no la imagen física de un éter que se comporta como un sólido elástico.

La tercera cita es del libro de Khinchin de mecánica estadística, y la frase «el autor» refiere a Gibbs a quien Khinchin discute en este punto. El uso de la palabra «modelo» en la cita de Khinchin es particularmente simpática al punto de vista conjuntista, porque Khin-

chin pretende en este trabajo sobre los fundamentos de la mecánica estadística que Gibbs no está interesado en apelar directamente a la realidad física o a establecer teorías físicas verdaderas, sino más bien a construir modelos o teorías que guardan analogías parciales con los complicados hechos empíricos de la termodinámica y otras ramas de la física. De nuevo, en esta cita tenemos como en el caso de la de Dobb, tal vez incluso más directamente, la tendencia a confundir el tipo lógico de las teorías y los modelos, pero de nuevo, esto no crea una dificultad. Cualquiera que ha examinado el trabajo de Gibbs o el de Khinchin admitirá enseguida lo fácil y directo que es formular sus trabajos de tal manera que admitan explícita y exactamente la distinción entre teorías y modelos hecha en lógica matemática. El carácter abstracto del trabajo de Gibbs en mecánica estadística proporciona un buen ejemplo particular para aplicar la noción exacta de modelo usada por los lógicos, porque no hay una tendencia directa e inmediata a pensar de las teorías de mecánica estadística de Gibbs que son teorías del universo físico.

Concerniendo al uso de la palabra «modelo» en física, pienso que la siguiente observación es empíricamente correcta. En las ramas más viejas y establecidas de la física que corresponden bien con los fenómenos empíricos que intentan explicar, existe solamente una ligera tendencia a usar alguna vez la palabra «modelo». El lenguaje de la teoría, el experimento y el sentido común están fundidos en un todo realista. Se aseveran los enunciados de la teoría como si ellos fueran una manera de describir el universo. Se describen los resultados experimentales como si no fueran sino un lenguaje obvio para describirlos. Las nociones del sentido común refinadas tal vez aquí y allá se toman como apropiadamente homogéneas con la teoría física. Por el otro lado, en aquellas ramas de la física que hasta ahora ofrecen una explicación inadecuada de los fenómenos físicos detallados de los que se ocupan hay un uso mucho más frecuente de la palabra «modelo». Las connotaciones del uso de la palabra es que el modelo es como un modelo de un aeroplano o un barco. Simplifican drásticamente los fenómenos físicos concretos y sólo dan una explicación de ciertos aspectos mayores o importantes de ellos. De nuevo, en tales usos de la palabra «modelo» debe enfatizarse que hay un constante intercambio entre el modelo como un objeto físico o no lingüístico y el modelo como una teoría.

La cita de Arrow que sigue a la de Khinchin ejemplifica en la física esta última tendencia. Arrow, diría yo, refiere al *modelo* de elec-

ción racional porque la teoría que él tiene en mente no da una descripción muy adecuada del fenómeno del cual se ocupa, sino sólo provee un esquema altamente simplificado. Las mismas consideraciones se aplican claramente bien a la cita de Simon. En Simon tenemos ejemplificado un fenómeno adicional que es muy común en las ciencias sociales y del comportamiento. Cierta teoría se establece en términos generales y amplios. Se realizan algunos experimentos cualitativos para poner a prueba esta teoría. Debido al éxito de esos experimentos, los científicos interesados en teorías más cuantitativas y exactas entonces van a lo que se llama la «construcción de un modelo» para la teoría original. En el lenguaje de los lógicos, sería más apropiado decir más bien que ellos están interesados en construir una teoría cuantitativa para equiparar las ideas intuitivas de la teoría original en vez de construir un modelo.

En la cita de Bush y Estes y en la de Doob, se ha introducido una importante línea de pensamiento que está, de hecho, muy estrechamente conectada con el concepto de modelo como es usado por los lógicos. Estoy pensando ahora en la noción de modelo en la estadística matemática y la amplia literatura sobre parámetros de estimación en los modelos y las hipótesis comprobatorias acerca de ellos. En una discusión estadística de los parámetros de estimación de un modelo, usualmente es una tarea trivial convertirla en una discusión en la que los usos de los términos están en completo acuerdo con el de los lógicos. Las consideraciones detalladas de las cuestiones estadísticas casi requieren la consideración de los modelos como entidades matemáticas o conjuntistas más bien que simples entidades físicas. La cuestión «¿qué tan bien se adecua el modelo a los datos?» es una pregunta natural para los estadísticos y los científicos del comportamiento. Sólo recientemente ha empezado a ser así para los físicos, y todavía es verdad que la mayoría de la literatura experimental en física se reporta en términos más bien de una estadística de marca medieval.

Algunos lectores pueden sentir que la dificultad principal con la tesis que he avanzado en este artículo radica en la carencia de ejemplos substantivos en las ciencias empíricas. Tales lectores podrían rápidamente admitir que hay numerosos ejemplos de teorías formuladas exactamente en las matemáticas puras, y con ello que está establecida una base exacta para definir precisamente los modelos en los cuales estas teorías son satisfechas. Pero podría mantenerse que la situación es muy distinta en cualquier rama de las ciencias empíricas.

La formulación de la teoría va mano a mano con el desarrollo de nuevos experimentos y nuevas técnicas experimentales. Es la práctica de los científicos empíricos, así podría pretenderse, no formular las teorías de una manera exacta, sino sólo darles una definitud conceptual suficiente para hacer suficientemente claras sus conexiones con experimentos corrientes para otros especialistas en el campo.

Aquel quien busca una caracterización exacta de la teoría, y de esta manera, de los modelos en ramas de la ciencia como la anatomía de invertebrados, la química orgánica o la física nuclear está en verdad podando el árbol equivocado. En varios artículos y libros he intentado proveer alguna evidencia contra esta concepción. En el capítulo final de mi *Introducción a la lógica* he formulado axiomáticamente una teoría de la medición y una versión de la mecánica clásica de partículas que satisface, creo, los estándares de exactitud y claridad acostumbrados en la formulación axiomática de teorías en matemáticas puras.

En Estes y Suppes (1959a) se intenta una formulación tal para una rama de la teoría del aprendizaje. En Rubin y Suppes (1954) se considera una formulación exacta de la mecánica relativista y en Suppes (1959a) se encuentra una formulación tal de la cinemática relativista.

Admitiblemente esas referencias son egocéntricas; también es pertinente referir al trabajo de Woodger (1957), Hermes (1938), Adams (1959), Debreu (1959), Noll (1959) y muchos otros. Aunque no es posible señalar con precisión en cada rama de la ciencia empírica que ofreciera una formulación exacta de la teoría fundamental de la disciplina, existen ahora ejemplos suficientes para hacer la afirmación de que no existe ninguna diferencia sistemática entre la formulación axiomática de teorías en ramas bien desarrolladas de la ciencia empírica y en ramas de la matemática pura.

Por consideraciones hechas en un buen número de direcciones diferentes, he intentado argüir que el concepto de modelo usado por los lógicos matemáticos es el concepto fundamental y básico de modelo requerido para una enunciación exacta de cualquier rama de la ciencia empírca. Para estar de acuerdo con esta tesis no es necesario excluir o deplorar usos o conceptos variantes de modelo ahora abordo en la ciencias empíricas. Como he indicado, yo mismo estoy dispuesto a admitir la significación e importancia de la noción de modelo físico corriente en mucho de la discusión en física e ingeniería. Lo que he intentado sostener es que en la enunciación exacta de la teoría o en el análisis exacto de los datos, la noción de modelo en el

sentido de los lógicos ofrece la herramienta intelectual apropiada para hacer el análisis tanto preciso como claro.

2. Usos

Los usos de los modelos en las matemáticas puras son muy conocidos como para requerir que se revisen aquí. La búsqueda en todas las ramas de las matemáticas de teoremas de representación es la más felizmente caracterizada en términos de modelos. Establecer un teorema de representación para una teoría es probar que existe una clase de modelos de la teoría tal que todo modelo de la teoría es isomorfo a algún miembro de esta clase. Ejemplos ahora clásicos de tales teoremas de representación son el teorema de Cayley, que establece que todo grupo es isomorfo a un grupo de transformaciones y el teorema de Stone de que toda álgebra booleana es isomorfa a un campo de conjuntos. Muchos problemas importantes en lógica matemática están formulados en términos de clases de modelos. Para un informe de problemas y resultados muy interesantes remitimos al lector a Tarski (1954).

Cuando una rama de la ciencia empírica se establece en forma exacta, esto es, cuando la teoría es axiomatizada dentro de un marco conjuntista estándar, las cuestiones matemáticas familiares que surgen acerca de los modelos de la teoría en las matemáticas puras, pueden también surgir para los modelos de la teoría empírica formulada precisamente. En ocasiones, tales aplicaciones tienen significación filosófica. Muchas de las discusiones del reduccionismo en la filosofía de la ciencia pueden ser formuladas mejor como una serie de problemas usando la noción de teorema de representación. Por ejemplo, la tesis de que la biología puede reducirse a la física sería en la opinión de muchas personas, establecida apropiadamente si uno pudiera mostrar que para cualquier modelo de una teoría biológica fuese posible construir un modelo isomorfo con la teoría física. El carácter difuso de gran parte de la teoría biológica vuelve desalentador cualquier intento presente para realizar tal programa. Un resultado exacto de este tipo puede establecerse para una rama de la física en relación con otra. Un ejemplo de esto es el resultado de Adams (1959), que para una caracterización adecuada de la mecánica del sólido rígido, todo modelo de la mecánica del sólido rígido es isomorfo a un modelo definido dentro de la mecánica de partículas simple. Pero no quiero dar

la impresión de que la aplicación de los modelos en las ciencias empíricas está restringida parcialmente a problemas que son del interés de los filósofos de la ciencia. El intento de caracterizar exactamente los modelos de una teoría empírica produce casi inevitablemente un entendimiento más preciso y claro del carácter exacto de la teoría. La vacuidad y superficialidad de muchas teorías clásicas en las ciencias sociales está bien resaltada por el intento de formular en cualquier manera exacta lo que constituye un modelo de la teoría. El tipo de teoría que consiste principalmente en observaciones perspicaces y slogans heurísticos no será susceptible de este tratamiento. El esfuerzo para hacerla exacta revelará al mismo tiempo la debilidad de la teoría.

Un uso importante de los modelos en las ciencias empíricas se da en la construcción de los experimentos Gedanken. Un experimento Gedanken es dado con precisión y claridad caracterizando un modelo de la teoría, el cual lo realiza. Un método estándar e importante para argüir contra la plausibilidad general de una teoría consiste en extenderla a un nuevo dominio, construyendo un modelo de la teoría en ese dominio. Este aspecto del uso de los modelos no necesita, sin embargo, ser restringido a los experimentos Gedanken. Un gran número de experimentos en psicología son diseñados precisamente con este propósito en mente, esto es, con la extensión de la teoría a un nuevo dominio, y la expectativa del experimentador de que los resultados en este dominio no serán aquéllos predichos por la teoría.

En mi opinión, un uso más exacto de la teoría de los modelos en la discusión de los experimentos Gedanken sería frecuentemente de valor en varias ramas de la ciencias empírica. Un ejemplo típico serían las numerosas discusiones centradas en la definición propuesta por Mach de la masa de los cuerpos en términos de sus aceleraciones mutuamente inducidas. A causa de su supuesta simplicidad y belleza, esta definición es citada frecuentemente. Aun desde un punto de vista matemático y cualquier teoría exacta de los modelos de la teoría mecánica, no es una definición propia en absoluto. Para una clase muy amplia de axiomatizaciones de la mecánica clásica de partículas, puede probarse, por el principio de Padoa, que no es posible dar una definición propia de la masa. Más aún, si el número de cuerpos interactuantes es mayor que siete, el conocimiento de la aceleración mutuamente inducida de las partículas no es suficiente para una determinación única de los radios de las masas de las partículas. La debilidad fundamental de la propuesta de Mach consiste en que él no vio que para realizar una definición en la teoría, no puede ofrecerse en

un único modelo, sino que debe ser apropiada para todo modelo de la teoría para que sea aceptable en el sentido estándar.

Otro uso significativo de los modelos, quizá peculiar a las ciencias empíricas, se da en el análisis de la relación entre la teoría y los datos experimentales. La importancia de los modelos en la estadística matemática ha sido ya mencionada. La homogeneidad del concepto usado en esta disciplina con el adoptado por los lógicos ha sido ya señalada arriba. El hecho sorprendente sobre el análisis estadístico de los datos es que se desvía completamente del tipo de comparación de modelos que no surgen ordinariamente en las matemáticas puras. Hablando en general, en alguna rama particular de las matemáticas puras, la comparación de modelos involucra comparación de dos modelos del mismo tipo lógico. Los teoremas de representación mencionados anteriormente nos proveen de buenos ejemplos. Aun en el caso de teoremas de inmersión, los cuales establecen que los modelos de un cierto tipo lógico pueden ser extendidos de una manera definida a modelos de otro tipo, el tipo lógico de los dos modelos es muy similar. La situación es, con frecuencia, radicalmente diferente en la comparación de la teoría y los experimentos. Por un lado, podríamos tener un modelo conjuntista muy elaborado de la teoría, el cual contiene funciones continuas y secuencias infinitas y, por otra parte, tenemos modelos conjuntistas de los datos, altamente finitistas. Quizá sea necesario explicar lo que entiendo por «modelos de los datos». La experiencia desesperadamente diversa y compleja que constituye un experimento no es la entidad que se compara directamente con el modelo de la teoría. Se hacen drásticas suposiciones de toda clase en la reducción de la experiencia experimental, como la llamaré, a una entidad simple preparada para ser comparada con un modelo de la teoría.

Quizá sería bueno concluir con un ejemplo que ilustre estas observaciones generales acerca de los modelos de los datos. Consideraré los modelos de la teoría de respuesta lineal expuesta en Estes y Suppes (1959). Para simplificar, supongamos que en cada ensayo, el organismo puede hacer exactamente una de dos respuestas, A_1 o A_2, y después de cada respuesta recibe un reforzamiento, E_1 o E_2, de una de las dos respuestas posibles. Un parámetro de aprendizaje θ, el cual es un número real tal que $0 \leqq \theta \leqq 1$, describe el índice de aprendizaje, en una forma que será definida en un momento. Una realización posible de la teoría es una terna ordenada $\chi = \langle X, P, \theta \rangle$ del siguiente tipo. X es el conjunto de todas las secuencias de pares or-

denados tales que el primer elemento de cada par es un miembro de algún conjunto A y el segundo elemento es un miembro de algún conjunto B, donde A y B tienen cada uno dos elementos. Intuitivamente, el conjunto A representa las dos posibles respuestas y el conjunto B los dos posibles reforzamientos. P es una medida de probabilidad sobre el campo de Borel de conjuntos cilíndricos de X y θ es un número real como el ya descrito. (En realidad hay una cierta arbitrariedad en la caracterización de las realizaciones posibles de teorías cuyos modelos tienen una estructura conjuntista muy complicada, pero ésta es una cuestión técnica en la cual no entraremos aquí.) Para definir los modelos de la teoría necesitamos cierta cantidad de notación. Sea $A_{i,n}$ el suceso de respuesta A_i en el ensayo n, $E_{j,n}$ el suceso de reforzamiento E_j en el ensayo n, donde $i, j = 1, 2$, y para x en X, sea x_n la clase de equivalencia de todas las secuencias en X que son idénticas con x, a través del ensayo n. Una realización posible de la teoría de respuesta lineal es entonces un modelo de la teoría si los siguientes dos axiomas son satisfechos en la realización:

Axioma 1. Si $P(E_{i,n}\, A_{i',n}\, x_{n-1}) > 0$ entonces
$P(A_{i,n+1} \mid E_{i,n}\, A_{i',n}\, x_{n-1}) = (1-\theta)P(A_{i,n} \mid x_{n+1}) + \theta.$
Axioma 2: Si $P(E_{j,n}\, A_{i',n}\, x_{n-1}) > 0$ y $i \neq j$ entonces
$P(A_{i,n+1} \mid E_{j,n} A_{i',n}\, x_{n-1}) = (1 - \theta)\, P(A_{i,n} \mid x_{n-1}).$

Como es claro a partir de estos dos axiomas, esta teoría de respuesta lineal es intuitivamente muy simple. El primer axioma dice precisamente que cuando se refuerza una respuesta, la probabilidad de producir esta respuesta en el siguiente ensayo se incrementa mediante una transformación lineal simple. Y el segundo axioma dice que si se refuerza alguna otra respuesta, la probabilidad de producir la respuesta decrece mediante una segunda transformación lineal. A pesar de la simplicidad de esta teoría, da cuenta razonablemente de un buen número de experimentos, y desde un punto de vista matemático, de ninguna manera es trivial caracterizar propiedades asintóticas de sus modelos.

El punto de interés aquí es, sin embargo, relacionar los modelos de esta teoría con modelos de los datos. Nuevamente, para simplificar, consideremos el caso de reforzamientos simples que no sean contingentes. En todo ensayo, la probabilidad de un reforzamiento E_1, independientemente de cualquier suceso anterior, es π. El experimentador decide sobre un experimento de, digamos, 400 ensayos para

cada sujeto, y usa una tabla de números aleatorios para construir a cada sujeto una secuencia finita de reforzamientos de los 400 ensayos. El aparato experimental podría ser descrito como sigue.

El sujeto se sienta ante una mesa de altura estándar. Montada verticalmente sobre la superficie de la mesa está un tablero negro de 125 cm de ancho y 75 cm de alto, puesto a 50 cm del extremo de la mesa. El experimentador se coloca detrás del tablero, fuera de la vista del sujeto. El aparato, tal y como lo ve el sujeto, está compuesto de dos silenciosas llaves que operan montadas a 20 cm de distancia de la superficie de la mesa y a 30 cm del final de ella; sobre el tablero están montadas tres lámparas de luz blanca. Una de esas luces, que sirve como señal de respuesta del sujeto, está centrada sobre las llaves a una altura de 42 cm de la superficie de la mesa. Cada una de las luces restantes, las señales de reforzamiento, están a una altura de 28 cm directamente arriba de una de las llaves. En todos los ensayos, la señal luminosa se encendió por 3,5 s; el tiempo entre exposiciones de señales sucesivas fue de 10 s. La luz de reforzamiento siguió al cese de la luz de señal después de 1,5 s y permaneció por 2 s.

El modelo de los aparatos incorpora muy poco de esta descripción. En cada ensayo, el experimentador registra la respuesta que se ha producido y el reforzamiento dado. Las expresiones de la cara del sujeto, los movimientos de sus miembros, y en el presente experimento, incluso cuánto tiempo él tomó para escoger cuál llave accionaría, se ignoran y no se registran. Aun cuando es claro exactamente lo que el experimentador registra, la noción de una realización posible de los datos no deja de ser ambigua. Como parte de la realización es claro que debemos tener un conjunto finito D que consista de todas las secuencias finitas posibles de longitud 400 donde, como anteriormente, los términos de las secuencias son pares ordenados; el primer miembro de cada tupla es extraído de algún conjunto A de pares y el segundo de algún conjunto B de pares. Si una realización posible está compuesta precisamente de un tal conjunto D, entonces cualquier realización sería también un modelo de los datos. Pero parece natural incluir en la realización una medida de probabilidad P sobre el conjunto de todos los subconjuntos de D, ya que de esta manera podríamos imponer a los modelos de los datos el plan experimental de reforzamiento.

En esos términos, una realización posible de los datos es una pareja ordenada $\zeta = \langle D, P \rangle$ y, para el caso de reforzamientos no contingentes, una realización es un modelo si y sólo si la medida de pro-

babilidad P tiene la propiedad de ser una distribución de Bernouilli con parámetro π sobre los miembros de los términos de las secuencias finitas en D, i. e., si y sólo si para todo n de 1 a 400, $P(E_{1,n} \mid x_{n-1}) = \pi$ cuando $P(x_n) > 0$.

Desafortunadamente, hay varios aspectos en los cuales esta caracterización de los modelos de datos puede considerarse insatisfactoria. El punto principal es que los modelos están todavía muy lejos de ser suprimidos, incluso en una versión altamente esquematizada del experimento. No ha sido tomado en cuenta ninguna de las prácticas estándar de hacer aleatorias las respuestas A_1 como la llave izquierda para un sujeto y la llave derecha para el otro. En segundo lugar, un modelo de los datos, como se definió anteriormente, contiene 2^{400} secuencias de respuestas posibles. Un experimentador que usa 30 ó 40 sujetos no produce sino una pequeña muestra de esas posibilidades. Es fácil dar una descripción formal de esta muestra, y es fácil argüir que el «verdadero» modelo de los datos es esta muestra misma, y no el modelo mucho más largo que habíamos definido. Aquí está involucrada la relación formal entre las tres entidades llamadas por los estadísticos la «muestra», la «población» y el «espacio de muestra». Una tercera dificultad está conectada con la medida de probabilidad que he incluido como parte del modelo de los datos. Ciertamente es correcto destacar que un modelo de los datos difícilmente es experimental en sentido propio, si no se da indicación alguna de cómo se produce la distribución de probabilidad de los reforzamientos.

No es posible en este artículo entrar en una discusión de esos puntos críticos o de las posibles modificaciones formales en los modelos de los datos que podrían hacerse para satisfacerlos. Mi propia convicción es que el concepto conjuntista de modelo es una herramienta útil para introducir orden formal en la teoría del diseño experimental y el análisis de datos. El punto central para mí es la posibilidad, mucho más grande de lo que ordinariamente se supone, de desarrollar una teoría formal adecuadamente detallada de esas cuestiones.

Capítulo 8

LA ESTRUCTURA DE LAS TEORIAS Y EL ANALISIS DE DATOS*

Por lo menos en otras dos ocasiones previas (Suppes (1962), (1967)) he tratado ya de exponer mis ideas acerca de la complicada naturaleza de la relación entre las teorías y los datos experimentales relevantes para ellas. Mis críticas han estado especialmente dirigidas contra la simplicidad, tan poco realista, del esquema standard que traduce las cosas a esto: una teoría se compone de dos partes, una de las cuales es un cálculo abstracto o lógico, y la otra un conjunto de reglas que confieren contenido empírico al cálculo lógico interpretando por lo menos alguno de los símbolos primitivos o definidos del cálculo. El propósito de este artículo es ofrecer una taxonomía de teorías construida teniendo en cuenta la diferente manera de tratar los datos y especialmente los errores de medida. La falta de una teoría del error en el esquema standard es una de las omisiones más graves, aunque yo no quiero de ninguna manera sugerir con esto que lo que yo haya de decir sea completo o definitivo. El tema está todavía demasiado poco cultivado y estructurado como para que quepa la posibilidad de llegar a resultados definitivos.

---

* De *La estructura de las teorías científicas*, Frederick Suppe (Ed.), Editora Nacional, Madrid, 1979. Traducción de Pilar Castrillo y Eloy Rada.

Empezaré hablando de las teorías deterministas con datos que no admiten corrección. Por *datos no corregibles* entiendo aquellos datos a los que no se aplica ninguna teoría del error, sea a la hora de medirlos, registrarlos o simplemente analizarlos. Más adelante diré algo también acerca de las relaciones que mantienen los datos que no admiten corrección con los conceptos más básicos correspondientes a sensaciones o percepciones elementales.

1. Teorías deterministas con datos no-corregibles

No voy a tratar de dar una definición formal de las teorías del tipo descrito por el título de este apartado. Con la expresión *teorías deterministas* me refiero, para decirlo de una manera un tanto vaga, a aquellas teorías que en su marco teórico no hacen uso para nada de nociones probabilísticas. Para mayor claridad, quisiera analizar tres ejemplos de teorías de este tipo. El primero es en realidad una teoría determinista, pero no parece necesitar ninguna teoría del error, debido precisamente a su carácter cualitativo y a su simplicidad conceptual. El segundo ejemplo plantea ya algunos problemas más sutiles y el tercero es un ejemplo histórico sacado de la astronomía antigua que sirva para ilustrar, más que otra cosa, de los fracasos de la ciencia antigua.

Antes de pasar a exponer el primer ejemplo, debo advertir que voy a moverme entre dos maneras de hablar acerca de las teorías. Cuando se trate de ejemplos simples, adoptaré un lenguaje teórico, relativamente formal, pero cuando los ejemplos sean más complicados, lo que haré será dejar algunos temas tan sólo bosquejados e intentar concentrarme en el tema conceptual sin usar para ello un aparato preciso.

El primero es un ejemplo de menor importancia y muy poco sutil, pero en cambio, completamente familiar. Se trata de la teoría de la paternidad biológica en la especie humana. Para evitar la dificultad de caer en una regresión infinita a la idea de que cada uno de los seres humanos ha tenido solamente ancestros humanos, podemos restringir la teoría de la paternidad a la consideración de la paternidad de los seres humanos vivos en este momento. La teoría se basa entonces en el conjunto A de seres humanos, el subconjunto L de seres humanos vivos en este momento, el subconjunto M de varones y la relación P de paternidad, esto es, $x\ P\ y$ cuando x es el padre de y.

La siguiente definición teórica contiene una formulación formal de la teoría:

Definición 1. Una estructura $U = \langle A, L, M, P \rangle$ es una estructura de paternidad humana si y sólo para cada x, cada y, y cada z de A se satisfacen los siguientes axiomas:

Axioma 1. Si xPy, entonces no yPx.
Axioma 2. Si x pertenece a L, entonces hay un único y tal que y pertenece a M y que yPx.
Axioma 3. Si x pertenece a L, entonces hay un único z tal que z no pertenece a M y que zPx.

El determinar si una posible realización de la teoría es o no es en realidad una estructura de paternidad humana es, desde el punto de vista de los datos ordinarios o normales acerca de una colección de seres humanos, determinista y no corregible. Esto no quiere decir que no existan casos médicamente aberrantes. Quiere decir simplemente que, respecto a los datos normales, no podría introducirse ninguna teoría del error para comprobar si se satisfacen los axiomas de la Definición 1. En el caso de una colección de seres humanos que no satisfacen los axiomas, es relativamente fácil establecer la manera de ampliar el conjunto básico A para conseguir un modelo de la teoría. Basta con añadir los padres de todos los seres humanos del conjunto. Lo fundamental es que la teoría es, por lo que se refiere a su verificación, lo bastante cualitativa y está lo suficientemente poco elaborada como para no necesitar ninguna teoría de análisis de datos que conceda especial atención a los problemas del error.

Tal vez sea aconsejable elaborar en este punto un poco más la noción de datos no corregibles que se emplea en este artículo. Una de las tesis que subyace al análisis aquí expuesto es la de que la clásica exigencia de certeza en la percepción se ve reemplazada metodológicamente en la ciencia por el concepto de datos no corregibles. La noción de datos no corregibles en la metodología científica no tiene el mismo status epistemológico que la noción de datos sensoriales no corregibles en las teorías filosóficas de la percepción. Para mí, el punto importante es que las exigencias absolutas de las teorías clásicas de la percepción se ven reemplazadas en la metodología científica por exigencias relativas. Se acepta como normal la no corregibilidad con respecto a una teoría determinada o a una colección de datos o de

experimentos determinada, pero a los datos incorregibles no se les atribuye un status más profundo, un status ontológico. Más adelante, pienso detenerme más en este punto.

Ahora quiero pasar a un segundo ejemplo de teoría determinista con datos no corregibles. Es bastante más sutil que el primero y costará menos trabajo tomarlo como una teoría. La teoría que considero es uno de los ejemplos más simples de medida fundamental en los que se pasa de observaciones cualitativas a afirmaciones cuantitativas.

Podemos desarrollar los axiomas de la medida continua considerando por lo menos tres interpretaciones específicas. Una para la medida de la masa por medio de una balanza de brazos iguales, otra para la medida de longitud de varas rígidas y la tercera para la medida de la probabilidad subjetiva. Caben desde luego otras interpretaciones, pero voy a limitarme a hacer algunas observaciones acerca de estas tres.

Desde un punto de vista formal, las estructuras básicas son tríos, $\langle X, \mathcal{T}, \succcurlyeq \rangle$, en donde X es un conjunto no vacío, $\mathcal{T}$ es una familia de subconjuntos de X y la relación $\succcurlyeq$ es una relación binaria en $\mathcal{T}$. Usando como objetos subconjuntos de X, eludimos la necesidad de utilizar como concepto primitivo un concepto independiente de concatenación. Se requiere como condición estructural general que $\mathcal{T}$ sea un *álgebra de conjuntos* para X, lo cual equivale a exigir que $\mathcal{T}$ sea no-vacío y cerrado en la unión y el complemento de conjuntos; es decir, si A y B pertenecen a $\mathcal{T}$, entonces $A \cup B$ y $\sim A$ también pertenecen a $\mathcal{T}$.

La interpretación perseguida de los conceptos primitivos es obvia en los tres casos mencionados. En el caso de la masa, X es un conjunto de objetos físicos, y para los dos subconjuntos A y B se da que $A \succcurlyeq B$ si y sólo si el conjunto de objetos A se considera por lo menos igual de pesado que el conjunto B.

En el caso de las varas rígidas, el conjunto X es precisamente la colección de varas y $A \succcurlyeq B$ si y sólo si el conjunto de varas A puesto extremo con extremo en una línea recta se considera igual o más largo que el conjunto B también extendido. Las distintas variaciones que caben en la manera exacta de hacer esta comparación cualitativa de longitud pueden ser fácilmente suplidas por el lector.

En el caso de la probabilidad subjetiva, el conjunto X es el conjunto de los resultados posibles del experimento o situación empírica considerada. Los subconjuntos de X en $\mathcal{T}$ son precisamente

eventos en el sentido ordinario de los conceptos de probabilidad y $A \succcurlyeq B$ si y sólo si A se considera por lo menos tan probable como B.

En la siguiente definición se dan una serie de axiomas en relación con la medida continua, sujetas a las dos restricciones de finitud e igualdad espacial. En el axioma 5, $\approx$ es la relación de equivalencia definida de la manera en que se acostumbra, en términos de $\succcurlyeq$; a saber, $A \approx B$ si y sólo si $A \succcurlyeq B$ y $B \succcurlyeq A$.

Definición 2. Una estructura $\chi = \langle X, \mathcal{T}, \succcurlyeq \rangle$ es una estructura continua, finita y espacialmente igual si y sólo si X es un conjunto finito, $\mathcal{T}$ es un álgebra de conjuntos de X, y para cada A, B y C de $\mathcal{T}$ se satisfacen los siguientes axiomas:

1. La relación $\succcurlyeq$ es una relación ordenadora débil de $\mathcal{T}$.
2. Si $A \cap C = \varnothing$ y $B \cap C = \varnothing$, entonces $A \succcurlyeq B$ si y sólo si $A \cup C \succcurlyeq B \cup C$;
3. $A \succcurlyeq \varnothing$;
4. No $\varnothing \succcurlyeq X$.
5. Si $A \succcurlyeq B$, entonces hay un C en $\mathcal{T}$ tal que $A \approx B \cup C$.

Desde el punto de vista de las ideas comunes acerca de la medida de longitud y masa, sería natural reforzar el axioma 3 y afirmar que si $A \neq \varnothing$, entonces $A > \varnothing$, pero puesto que por una parte esto no se requiere para el teorema de representación y por otra es excesivamente restrictivo en el caso de la probabilidad subjetiva, parece más apropiada la formulación más débil de dicho axioma.

Para establecer el teorema de representación y unicidad nos servimos de la noción de medida aditiva, θ, de $\mathcal{T}$ para los números reales, es decir, de una función μ tal que para todo A y todo B de $\mathcal{T}$.

(I) $\mu(\varnothing) = 0$.
(II) $\mu(A) \geq 0$.
(III) Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

en donde $\varnothing$ es el conjunto vacío; también se requiere para las aplicaciones que aquí se intentan hacer que $\mu(X) > 0$. Es posible demostrar un teorema de representación enormemente firme con el propósito de ver que sólo hay dos tipos no equivalentes de átomos.

Teorema. Sea $\chi = \langle X, \mathcal{T}, \succcurlyeq \rangle$ una estructura extensia finita y

espacialmente igual. Entonces existe una medida aditiva μ tal que para todo A y todo B de $\mathcal{T}$.

$$\mu(A) \geq \mu(B) \text{ si y sólo si } A \geq B$$

y la medida μ es única hasta una transformación de semejanza positiva. Además, hay en $\mathcal{T}$ a lo sumo dos clases de equivalencia de eventos atómicos; y si hay dos en lugar de una, una de ellas contiene el evento vacío.

Para la prueba de este teorema, ver Suppes (1969a) Pte. I.

La «delicada» cuestión acerca de esta teoría de la medida continua, que en su enunciación formal es una de las teorías más sencillas de medida fundamental, es ésta: ¿Podemos, sin introducir una teoría de errores, aplicar realistamente esta teoría a la construcción de escalas fundamentales como haríamos en la construcción de unidades fundamentales de peso o de longitud? Si no podemos, ¿cómo vamos a introducir el difícil y engorroso problema del error precisamente en el momento en que estamos haciendo la transformación de conceptos cualitativos a cuantitativos? Yo creo que en la primera etapa del análisis elemental podemos dejar de lado tal teoría explícita del error. Un análisis de laboratorio más refinado se realiza en términos del procedimiento recursivo de un sistema o conjunto de unidades usadas como base para la siguiente etapa. Mi interés aquí se limita sólo a la primera etapa de la implantación de tales procedimientos de medida cuantitativa. En esta etapa se construyen objetos —por ejemplo, un conjunto fundamental de pesos— que parecen satisfacer con exactitud los axiomas. El siguiente paso, consistente en la estimación del error de medida con objeto de indicar la exactitud del conjunto de unidades, es un paso más allá de la primera implantación de los procedimientos de medida fundamental. Este paso adicional se requiere para cualquier trabajo complicado, tanto de laboratorio como de campo. Sin embargo, se pueden presentar argumentos convincentes a favor de la idea de que es hasta necesario no exigir dicha teoría inicialmente para lograr la transformación de la forma cualitativa en la cuantitativa. En resumen, estoy manteniendo que muchas de las teorías básicas de medida fundamental se pueden considerar como ejemplos de teorías deterministas con datos no corregibles.

Mi tercer ejemplo, que es uno de los más bellos e importantes de toda la historia de la ciencia sólo me limitaré a bosquejarlo dada su

complejidad. La ausencia de una teoría explícita del error es una de las mayores sorpresas que se presentan en él. El ejemplo en el que estoy pensando es el del desarrollo de la matemática antigua y de la astronomía observacional que lleva hasta la teoría contenida en el *Almagesto* de Ptolomeo. A pesar de la aproximación del ajuste logrado entre teoría y datos en la astronomía ptolomaica y del nivel de análisis que era de naturaleza completamente cuantitativa y matemática, no se usó en el corpus de la astronomía antigua ninguna teoría explícita del error para ajustar las observaciones discrepantes. Parece suponerse, sin que se haga explícito, que todas las observaciones normales deben ajustarse a la teoría con toda exactitud. Al menos no se introduce ningún concepto sistemático de error en la medida de las observaciones. Esto es especialmente sorprendente en ciertos aspectos, debido a los métodos de observación relativamente rudimentarios disponibles.

Considerando la situación, la teoría de la paternidad humana es un caso excesivamente simple (aunque sea apropiado) de formulación determinista con datos no corregibles. El segundo ejemplo de medida fundamental está en el límite de las dificultades y éstas, desde luego, aparecen una vez que se requiere un análisis más complejo. La teoría ptolomaica es explícitamente una teoría determinista con datos no corregibles, pero la falta de una teoría sistemática del error es, tal vez, el mayor defecto metodológico de la astronomía ptolemaica.

2. Teorías deterministas con datos corregibles

El gran ejemplo de teoría del tipo descrito por el encabezamiento de esta sección es la mecánica clásica. Conviene decir en seguida que la corregibilidad de los datos no se sigue de la estructura de la teoría como tal y que, en este aspecto, todas las teorías deterministas tienen básicamente la misma estructura. Más bien se sigue de la metodología de la comprobación de la teoría. Lo fundamental en la mecánica clásica es que se ha desarrollado y aplicado extensamente en las aplicaciones más importantes de la teoría una teoría muy elaborada del error. Para decirlo con otras palabras, en este apartado estoy considerando las teorías deterministas que no es que incorporen una teoría del error en su estructura, sino que se aplican a datos que se aceptan como erróneos en parte y que, por consiguiente, requieren alguna teoría para abordar la corrección de los mismos. En muchos

aspectos el ímpetu dado a la teoría de la probabilidad por el profundo análisis que Laplace hiciera de los errores, especialmente en las observaciones astronómicas, ha sido uno de los rasgos metodológicos más importante de la ciencia moderna. Es, ante todo, una característica que distingue la ciencia moderna de la ciencia antigua.

Si distinguimos la ciencia moderna cuantitativa de la premoderna por la presencia o ausencia de una teoría sistemática de error, entonces Newton debe ser considerado como premoderno. La consideración cuantitativa y sistemática de los datos en los *Principia* se reduce casi por completo al libro tercero, y es preciso señalar que en las Reglas para Razonar en Filosofía, con las que Newton comienza el Libro III, no se menciona el problema de error o de la rectificación de las observaciones no razonables. Es cierto que al exponer tanto los fenómenos importantes como las proposiciones correspondientes con las que continúa el Libro III Newton menciona ocasionalmente el olvido de los errores y hace varias observaciones cualitativas acerca de los errores de observación. Consideremos, por ejemplo, el Fenómeno VI, consistente en que el movimiento de la luna respecto al centro de la tierra describe un área proporcional al tiempo de recorrido. De acuerdo con esta descripción, Newton afirmará: «esto es lo que podemos concluir a partir del movimiento aparente de la luna comparado con su diámetro aparente. Cierto es que el movimiento de la luna se ve algo perturbado por la acción del Sol, pero al establecer estos fenómenos prescindo de esos insignificantes y despreciables errores». Newton ha destacado también por sus contribuciones a la teoría de la interpolación de datos que, en sí misma, constituye un esfuerzo por reducir la magnitud de los errores.

Sin embargo, hasta el siglo XVIII no apareció ningún tratamiento sistemático de la teoría del error. La primera referencia sobre la aplicación de la teoría de la probabilidad al análisis del error mencionada por Todhunter (1949) es una obra publicada por William Simpson en 1757 con el título de *Miscellaneous Tracts on Some Curious and Verry Interling Subjects in Mechanics, Physical-Astronomy, and Speculative Mathematics*. Y también, según Todhunter, el siguiente tratado sistemático sobre el tema fue publicado por Lagrange en el quinto volumen de las *Miscellanea Taurinensia*, que apareció entre los años 1770-1773.

Dadas las dificultades analíticas encontradas en todo tratamiento general de la teoría de los errores, no tiene nada de extraño que el mismo problema tratado por Lagrange sea descrito por Todhunter en

los siguientes términos: «El primer problema es el siguiente: se supone que en cada observación hay casos *A* en los que no se da ningún error, casos *B* en los que se da un error igual a 1 y casos *D* en los que se da un error igual a −1; se pretende hallar la probabilidad de que tomando el promedio de *n* observaciones los resultados sean exactos» (págs. 301-302). En problemas posteriores tratados en su memoria, Lagrange pasa del caso discreto al continuo. De este modo, halla una expresión para la probabilidad de que el error en el resultado medio se halle entre los resultados asignados, de acuerdo con hipótesis razonablemente generales sobre la aparición de errores singulares.

El tema completo del análisis de los errores de observación fue madurando en las subsiguientes memorias de Laplace y es en realidad en la aplicación que Laplace hiciera del aparato de la teoría de la probabilidad a los errores de la observación astronómica donde el análisis probabilístico de los datos no corregibles adquirió un estado de madurez y complejidad.

Como consecuencia de los esfuerzos de Simpson, Lagrange, Laplace, Gauss y otros, la física clásica del siglo XIX incluyó una teoría sistemática del análisis de errores y al menos los resultados elementales fueron utilizados en temas tan dispares como la astronomía y la teoría electromagnética.

Por otra parte, sería erróneo exagerar la amplitud con que realmente fue usada la teoría sistemática de errores en la física clásica del siglo XIX. Un tratado tan fundamental e importante como el de Maxwell sobre la electricidad y el magnetismo apenas incluye, en sus dos volúmenes, análisis cuantitativo alguno de los errores de medida. De hecho, uno de los fallos del tratado de Maxwell, que a la vez es un indicio de la relativa novedad del tema del mismo, es la falta de los generalmente tediosos y complicados análisis de datos de la astronomía, donde se dedicó gran atención a pequeñas discrepancias entre observación y teoría. También es un fallo el que no se haga en el tratado resumen alguno de la discrepancia entre teoría y observación ni se intente atribuir esas discrepancias a la teoría, por una parte, y a los errores de medida, por otra. Este análisis ha tenido una importancia fundamental en la larga historia de la astronomía y ésta es la razón por la que el mejor ejemplo de teoría determinista con datos corregibles del siglo XX tal vez sea la teoría de la relatividad. Aquí se ha dedicado una gran atención a la exactitud del aparato de medida y, a la hora de juzgar el éxito de la teoría general de la relatividad, ha sido importante preguntar si las discrepancias que se mantienen entre

teoría y observación caen dentro de los límites de error de la medida observacional.

3. Teorías probabilísticas con datos no-corregibles

He seleccionado como ejemplo de teoría del tipo que vamos a analizar en esta sección la teoría del aprendizaje lineal de la sicología matemática. He elegido este ejemplo, no por su profundidad conceptual o adecuación empírica, sino porque se puede formular de una forma muy sencilla y porque será fácil de entender para quien no esté familiarizado con el campo general de la sicología matemática. La exposición explícita de teorías más adecuadas exigiría un espacio y un tiempo mucho mayores. Para una formulación general en términos axiomáticos de la teoría del estímulo-respuesta, ver Suppes (1969).

Con objeto de simplificar la presentación de la teoría, vamos a suponer que en cada ensayo el organismo de la situación experimental puede dar exactamente una de las dos respuestas A_1 o A_2, y que después de cada respuesta recibe un refuerzo E_1 o E_2, de una de las dos posibles respuestas. Un resultado experimental posible en el sentido de la teoría es una secuencia infinita de pares ordenados $\langle i, j\rangle$, en donde $i, j = 1, 2$, e i representa la respuesta observada y j el refuerzo de un ensayo dado del experimento.

Una ejemplificación posible de la teoría es un trío ordenado $\chi = \langle X, P, \theta\rangle$ del siguiente tipo: El conjunto X es el conjunto de todas las secuencias de pares ordenados $\langle i, j\rangle$ con $i, j = 1, 2$. La función P es una medida de probabilidad realizada según el álgebra σ más pequeña de las que contienen el álgebra de conjuntos-cilindro de X; y θ, un número real del intervalo $0 < \theta < 1$, es el parámetro del aprendizaje.

Para establecer los axiomas de la teoría necesitamos introducir alguna notación. Sea $A_{i,n}$ el acontecimiento-respuesta Ai en el ensayo n, Ej, n el acontecimiento refuerzo Ej en el ensayo n, donde $i, j = 1, 2$, y sea x_n, para x de X, la clase de equivalencia de todas las secuencias de X que son idénticas a x a lo largo del ensayo n.

Definición 3. Una estructura $\chi = \langle X, P, \theta\rangle$ es una estructura de aprendizaje lineal si y sólo si se satisfacen los dos axiomas siguientes para cada n y para cada $i, i', j = 1, 2$.

Axioma 1. Si $P(E_{i,n}A_{i',n}x_{n-1}) > 0$, entonces
$P(A_{i,n+1} \mid E_{i,n}A_{i',n}x_{n-1}) = (1-\theta)P(A_{i,n} \mid x_{n-1}) + \theta.$

Axioma 2. Si $P(E_{j,n}A_{i',n}x_{n-1}) > 0$ e $i \neq j$, entonces
$P(A_{i,n+1} \mid E_{j,n}A_{i',n}x_{n-1}) = (1 - \theta)P(A_{i,n} \mid x_{n-1}).$

El primer axioma afirma que cuando se refuerza una respuesta, la probabilidad de dicha respuesta en el siguiente ensayo se ve aumentada según una transformación lineal simple. El segundo afirma que cuando se refuerza una respuesta distinta, la probabilidad de la primera se ve disminuida según una segunda transformación lineal. Desde un punto de vista sicológico, es evidente que esto es lo que puede llamarse teoría del aprendizaje como puro refuerzo. La teoría ha sido ampliamente usada para analizar datos experimentales. No voy a entrar aquí en sus virtudes y defectos para el análisis de los experimentos, sino que me centraré en el punto general de cómo se mantiene tal teoría probabilística con respecto a los datos de todos los experimentos a los que se ha aplicado.

Para indicar cómo se usan las estructuras del aprendizaje lineal en el análisis de datos experimentales, podemos considerar uno de los tipos más simples de experimento, el experimento de la probabilidad de aprendizaje con refuerzo no contingente. Denotaremos la probabilidad del refuerzo E_1 por π y la del refuerzo E_2 por $1 - \pi$. El inventario de refuerzos es tal que se da exactamente un refuerzo en cada ensayo. El término *no-contingente* significa que la probabilidad de que se dé un refuerzo concreto es independiente de la respuesta del sujeto y, por tanto, de todo modelo previo de respuestas y de refuerzos. En un experimento típico con sujetos humanos, a los sujetos se les pide que respondan varios cientos de veces. Los datos de esos ensayos se analizan luego en términos de la comparación de los mismos entre las frecuencias relativas observadas de los datos y las probabilidades predichas por la teoría. El primer problema que hay que afrontar, y que es un problema típico de todas las teorías de alguna complejidad, es la estimación de parámetros cuyo valor no se puede determinar de forma independiente. En la situación actual el parámetro del aprendizaje θ tiene este status. Su estimación debe hacerse a partir de los datos y las predicciones sólo se pueden hacer una vez obtenida esta estimación. De hecho, para un análisis completo de los datos debe ser tenido en cuenta un parámetro adicional, a saber, la probabilidad inicial de la respuesta A_1, pero aquí ignoraremos este problema ateniéndonos solamente a las predicciones asintóticas.

Los datos experimentales que vamos a considerar para dar concreción a esta exposición se toman de Suppes y Atkinson (1960) Cap. 10. En este experimento los sujetos fueron sentados ante una mesa en la que se habían colocado dos llaves con dos luces, una sobre cada llave, en un tablero vertical. El problema que había de resolver el sujeto consistía en predecir qué luz se encendería en cada ensayo. Los encendidos de las luces, naturalmente, representaban los refuerzos E_1 y E_2 de las respuestas predictivas A_1 y A_2. En el libro al que acabamos de referirnos se dan detalles del procedimiento experimental y de la descripción del aparato que no vamos a repetir aquí. En el experimento concreto que vamos a considerar se sometió a cada sujeto a 200 ensayos y se realizó el experimento con 30 sujetos. Los sujetos eran todos estudiantes de Licenciatura de Stanford. La probabilidad del refuerzo E_1 era de $\pi = 0{,}6$.

Consideremos en primer lugar el problema de considerar el parámetro θ como asintótico. Usamos un procedimiento de posibilidad cuasi-máxima basado en las probabilidades condicionales.

$$\lim_{n \to \infty} P(A_{i,n+1} \mid E_{j,n}A_{k,n}) = P(A_{i,n+1} \mid E_{j,n}A_{k,n}).$$

La derivación de esas probabilidades condicionales como función de θ y de π se hace en Estes y Suppes (1959). Para el caso que nos ocupa, los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned}
P_\infty\ (A_{1,n+1} \mid E_{1,n}A_{1,n}) &= (1 - \theta)a + \theta, \\
P_\infty\ (A_{1,n+1} \mid E_{2,n}A_{1,n}) &= (1 - \theta)a, \\
P_\infty\ (A_{2,n+1} \mid E_{1,n}A_{2,n}) &= (1 - \theta)b, \\
P_\infty\ (A_{2,n+1} \mid E_{2,n}A_{2,n}) &= (1 - \theta)b + \theta.
\end{aligned}$$

donde

$$a = [2\pi(1 - \theta) + \theta] / (2 - \theta)$$

y

$$b = [2(1 - \pi)(1 - \theta) + \theta] / (2 - \theta).$$

La función a maximizar se define en términos de esas probabilidades condicionales y de las frecuencias observadas de transición asintótica. Especialmente,

$$
\begin{aligned}
L^*(\theta) = {} & 748 \log [(1-\theta)a + \theta] \\
& + 298 \log [1 - (1-\theta)a - \theta] \\
& + 394 \log [(1-\theta)a] \\
& + 342 \log [(1 - (1-\theta)a] \\
& + 462 \log [1 - (1-\theta)b] + 306 \log [(1-\theta)b] \\
& + 186 \log [1 - (1-\theta)b - \theta] \\
& + 264 \log [(1-\theta)b + b]
\end{aligned}
$$

Es relativamente sencillo resolver esta ecuación numéricamente y mostrar que el máximo para dos decimales se obtiene con $\theta^* = .19$. Conviene señalar en seguida que esta estimación de probabilidad cuasi-máxima se expone formalmente para que funcione como una estimación de probabilidad máxima, pero no tiene las propiedades estadísticas de una estimación de probabilidad máxima. Se usa la estimación de probabilidad cuasi-máxima y no máxima debido a la dificultad de obtener una expresión analítica de la estimación misma de probabilidad máxima. No vamos a entrar aquí en los detalles estadísticos del problema, pero tal vez convenga señalar que incluso en una teoría de la simplicidad de la de las estructuras de aprendizaje lineal es imposible aplicar algunos de los métodos estadísticos standard y de los criterios de bondad de los estimadores y que debemos recurrir a métodos menos satisfactorios. En este caso concreto, como el estimador de probabilidad cuasi-máxima cambia al aumentar la condicionalización mediante la inclusión de nuevas piezas del pasado, la estimación total de la probabilidad máxima resulta cada vez más aproximada. (Pero incluso esta garantía de aproximación a la estimación de probabilidad máxima depende a su vez de que el proceso sea ergódico.)

TABLA 1. *Comparación de predicciones secuenciales asintóticas del modelo lineal con datos observados*

	Observados	*Predichos*
$P(A_1 \mid E_1A_1)$	.715	.710
$P(A_1 \mid E_2A_1)$	.535	.520
$P(A_1 \mid E_1A_2)$	.602	.625
$P(A_1 \mid E_2A_2)$	.413	.435

En la Tabla 1 se expone la comparación entre las frecuencias predichas y las frecuencias relativas observadas para el valor estimado de θ. La prueba χ^2 de la bondad del acuerdo entre los valores predichos y los valores observados nos da un χ^2 de 3,49. Hay cuatro grados de libertad, pero la estimación de un parámetro se ha hecho a partir de los datos y por eso el χ^2 ha de interpretarse con un grado de libertad igual a 3, y, como cabría esperar del examen de la Tabla 1, no hay una diferencia estadísticamente significativa entre los datos predichos y los observados. Hay otras relaciones teóricas en los datos que también son predichas por la teoría y en relación con las cuales el acuerdo no es igual de bueno. No vamos a seguir aquí con estas cuestiones que se analizan con todo detalle en la referencia ya citada.

En la tabla 1 hay incluso cierto indicio de discrepancia y es interesante ver cómo se puede pensar acerca de esas discrepancias dentro del marco de una teoría probabilística.

Desde un punto de vista a priori, tal vez deseáramos decir que algunos de los datos fueron erróneamente registrados y que en ocasiones no usuales, en las que surgen aspectos de los datos peculiares y difíciles de entender, podemos cuestionar la veracidad de los mismos. Sin embargo, en todos los casos normales, cuando afirmamos que los datos no son corregibles, queremos dar a entender que los datos se aceptan sin cuestionarlos y que no hay ningún intento sistemático de estimar el error en las medidas o en los registros de los datos. La razón de esto está del todo clara en este caso concreto. Todo lo que se registra en cada ensayo es la aparición de una respuesta a la derecha o a la izquierda y la aparición inmediatamente posterior de un refuerzo a la derecha y a la izquierda. En circunstancias ordinarias no se cometerán errores y, en concreto, no se requiere una teoría de los errores observacionales tal como se halla desarrollada en la física para juzgar los errores en este tipo de observaciones. Por consiguiente, sería poco probable atribuir las discrepancias entre los datos y la teoría a errores de observación. Estaríamos tratando los datos como no corregibles en todos los casos normales, y ésta es precisamente la situación en el ejemplo en que estamos. En otras palabras, en la comprobación de teorías probabilísticas, aquellos datos que entrañan clasificación se tratan como si fueran no corregibles. Hay otra razón más profunda para ello; la teoría misma ofrece una cierta resistencia, por así decirlo, a tomar en consideración las pequeñas discrepancias entre teoría y experimentación y hay una tendencia natural a refugiarse en esta resistencia más que a tener en cuenta los supuestos errores

en el registro y análisis de discrepancias que existen. En este caso la explicación natural de las insignificantes discrepancias entre los valores observados y los predichos ha de encontrarse en la teoría estadística del muestreo. Esta es precisamente la razón por la cual hemos aplicado una prueba χ^2. Lo que la prueba χ^2 dice es que para el número de observaciones consideradas aquí, las fluctuaciones del muestreo del orden obtenido no indican una discrepancia significativa entre predicciones teóricas y datos experimentales. Conviene destacar que el modo en que se establece esta comparación en las teorías probabilísticas es mucho más natural y directo que en el caso de las teorías deterministas. En este último caso, la comparación no puede hacerse dentro de la misma teoría, sino que debe de trasladarse a la teoría de los errores de medida y observación, para luego emplear las mejores estimaciones obtenidas por aplicación de la teoría de los errores de medida con vistas a probar las predicciones deterministas de la misma. Pero incluso en este caso debemos añadir una discusión adicional con objeto de ver si las insignificantes discrepancias aún existentes entre teoría y experimento han de considerarse significativas, y otra vez esta discusión vuelve a no ser del todo natural como ocurre en las teorías probabilísticas.

4. Teorías probabilísticas con datos corregibles

Indudablemente, el ejemplo científico más significativo de teoría de este tipo es la mecánica cuántica. Esta teoría es de naturaleza enteramente probabilística y al mismo tiempo los datos son corregibles en el sentido usado en este artículo. La teoría standard de errores se usa en muchos casos para analizar las observaciones y aparece en un enorme porcentaje de artículos experimentales. Sin embargo, incluso en el caso de la mecánica cuántica, a pesar del hecho de que muchas de las variables son de naturaleza continua, y, por tanto, están de forma natural sujetas a una teoría sistemática de errores de observación, muchos de los análisis de la correspondencia entre datos y teorías son inadecuados desde un punto de vista estadístico. Esto es de lo más sorprendente tratándose de la mecánica cuántica, a diferencia de lo que ocurre con una clase típica de teoría que describiré en seguida, debido a que en la mecánica cuántica ha habido entre los físicos una tendencia a desentenderse de los aspectos probabilísticos de la teoría. Quiero decir con esto que ellos van a considerar las expectativas, por

ejemplo, en términos de ejemplos tan amplios que la resistencia introducida por las teorías probabilísticas que hemos analizado más arriba resulta completamente eliminada.

En el caso de las teorías que se prueban en términos de distribuciones totales de variables de azar y no simplemente en términos de expectativas, en general no se aplica la teoría de errores aun cuando es evidente que se hallan presentes errores de medida. Las razones ya han sido expuestas. Es debido a que la resistencia introducida por la formulación probabilística de la teoría y las suposiciones de muestreo envueltas en la consideración de la concordancia en que un cuerpo finito de datos y una distribución predicha dan cuenta por sí mismas de todas las discrepancias poco importantes entre teoría y experimento.

Tal vez sea útil examinar con algún detalle una de estas teorías de naturaleza simple. La generalización natural de las estructuras del aprendizaje lineal a un continuo de respuestas es un caso fácil de considerar. La exposición que aquí vamos a hacer sigue a Suppes (1959a).

En el caso finito o continuo se puede representar un experimento mediante una secuencia $(A_1, E_1, A_2, E_2, \ldots, A_n, E_n, \ldots)$ de variables de azar, donde la elección de letras sigue convenciones establecidas: el valor de la variable de azar An es el número que representa la respuesta en el ensayo n, y el valor de En es el número que representa el evento reforzador ocurrido en el ensayo n. Toda secuencia de valores de esas variables de azar representa un resultado experimental posible. En el futuro vamos a referirnos únicamente a secuencias finitas de esas variables de azar, que conviene escribir en el orden inverso $(E_n, A_n, E_{n-1}, A_{n-1}, \ldots, E_1, A_1)$.

Dentro tanto del modelo finito como del continuo, la teoría se formula para la probabilidad de una respuesta en el ensayo $n + 1$, dada toda la serie anterior de respuestas y refuerzos. Para referirnos a esta secuencia precedente, vamos a usar la notación S_n. Por tanto, dicho de una forma más formal, S_n es una secuencia finita de $2n$ de longitud de los valores posibles de la secuencia de variables de azar $(E_n, A_n, E_{n-1}, A_{n-1}, \ldots, E_1, A_1)$. La distribución conjunta (acumulativa) de las primeras respuestas n y refuerzos n se designa por Jn, es decir, si $S_n = (y_n, \chi_n, \ldots, y_1, \chi_1)$, entonces

$$J_n(S_n) = J_n(y_n, x_n, \ldots, y_1, x_1)$$
$$= P(E_n \leq y_n, A_n \leq x_n, \ldots, E_1 \leq y_1, A_1 \leq x_1),$$

donde P es la medida del espacio de muestra subyacente. Para mayor claridad notacional, usamos las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots$ para los valores de las variables estocásticas de respuesta y $y_1, y_2, \ldots, y_n \ldots$ para las variables estocásticas de refuerzo.

En el caso continuo, tenemos un parámetro del aprendizaje θ, que cumple más o menos la misma función que el parámetro correspondiente del modelo finito. Sin embargo, no parece que sea razonable que el efecto total del refuerzo se concentre en un punto, como ocurre en el caso finito. En consecuencia, añadimos una *distribución difusora* $k(x; y)$ que esparce el efecto del refuerzo en torno al punto de refuerzo. Para cada refuerzo y, $k(x; y)$ es una distribución sobre las respuestas; es decir, $k(a; y) = 0$ y $k(b; y) = 1$, y si $x \leq x'$, entonces $k(x; y) \leq k(x'y)$ para cada y de (a, b).

Los dos primeros axiomas que siguen a continuación están destinados simplemente a hacer suposiciones explícitas de aquellas propiedades difusoras que parecen altamente justificadas empíricamente. El tercer axioma afirma lo mismo que los otros dos, pero para un caso finito.

Axioma C_1. La distribución J_n es continua y doblemente diferenciable por partes en ambas variables.

Axioma C_2. La distribución $k(x; y)$ es continua y doblemente diferenciable por partes en ambas variables.

Axioma C_3. $J_{n+1}(x|y_n, x_n, s_{n-1}) = (1 - \theta)J_n(x|s_{n-1}) + \theta k(x; y_n)$.

El axioma C_3 dice que dada la secuencia (y_n, x_n, s_{n-1}), la distribución condicional de la variable fortuita de respuesta en el ensayo $n + 1$ es $(1 - \theta)$ por la distribución condicional de la variable de respuesta en el ensayo n, dada la secuencia s_{n-1}, más θ por la distribución difusora $k(x; y_n)$. El parámetro de la distribución difusora es el punto de refuerzo y_n en la secuencia (y_n, x_n, s_{n-1}).

En experimentos hechos para comprobar esta teoría a lo largo de varios años hemos usado un aparato consistente en un amplio disco circular que con fines de medida se dividió de forma uniforme en 400 arcos de igual longitud. Cuando un sujeto daba una respuesta o cuando se hacía un refuerzo los datos se registraban en términos de uno de estos 400 números. El propio disco circular tenía un diámetro de aproximadamente seis pies y, de esta forma, era fácil determinar con más precisión el punto exacto de refuerzo o respuesta, si bien desde el punto de vista de la comprobación no se necesitaba una

observación más exacta. La concordancia entre datos y teoría se hubiera podido comprobar satisfactoriamente mediante histogramas que de hecho no utilizasen la escala 400, pero se añadieron observaciones dentro de las divisiones de una escala aún menos fina con objeto de lograr un número de observaciones en cada celda suficiente como para satisfacer los requisitos teóricos de pruebas estadísticas standards como el χ^2.

Las estructuras continuas de aprendizaje lineal ejemplifican una etapa temprana del desarrollo de teorías probabilísticas con datos corregibles. No hay ningún problema con la corregibilidad de los datos. Las observaciones no son exactas y resulta apropiada una teoría sistemática de errores, pero simplemente no se necesita. Esto es debido a que la teoría aún no se halla muy desarrollada, ya que los fenómenos objeto de investigación se estudian a un nivel cuantitativo relativamente tosco comparado con el tipo de resultados cuantitativos que predominan en disciplinas antiguas y desarrolladas como la astronomía clásica.

Por otra parte, como ya he destacado, una de las características más importantes de las teorías probabilísticas es que proporcionan un aparato para derivar conclusiones cuantitativas muy exactas a partir de lo que sólo parecen ser débiles suposiciones probabilísticas. Uno de los objetos más importantes a los que se ha aplicado la investigación en términos de la estructura de las teorías probabilísticas es la búsqueda de resultados asintomáticos, o, dicho de forma más general, de resultados que tienen probabilidad 1. Una vez que se aplican resultados que dependen de muestras muy amplias y que exigen, por tanto, alguna de las leyes de los grandes números, desaparece la vaguedad entre teoría y observación y de nuevo deben entrar a ocupar un lugar los errores de medida.

He ofrecido una cuádruple clasificación de teorías y tal vez pueda pensarse que con ello intento ser exhaustivo y establecer algo definitivo. Sin embargo, está claro que se trata de una clasificación enormemente tosca y que, como he insinuado al principio, no debe ser considerada más que como una taxonomía preliminar. La mecánica cuántica es uno de los mejores ejemplos de cómo la clasificación aquí dada necesita una mayor elaboración y un mayor desarrollo. Desde un punto de vista filosófico, uno de los temas más importantes de la mecánica cuántica es la exposición que al final del tratado de von Neumann se hace del tratamiento mecánico cuántico de la interacción entre los fenómenos experimentales y el aparato de medida usado para

observarlos. En este caso, que es importante en fenómenos microscópicos es preciso añadir algunas cosas más sutiles al hablar de las relaciones entre teoría y datos y aquí no he empezado ni a tocar estos temas.

5. Algunas conclusiones filosóficas

El orden en que se han expuesto aquí los cuatro tipos de teorías representa muy aproximadamente el orden cronológico de su desarrollo. La astronomía antigua es el ejemplo paradigmático de teoría determinista con datos no corregibles y, como he señalado, incluso la obra de Newton puede ser incluida en este capítulo. El complicado desarrollo de una teoría de errores en combinación con la mecánica celeste debido a Laplace es el ejemplo paradigmático de teoría determinista con datos corregibles. Algunas investigaciones de fenómenos cualitativos de las ciencias de la conducta, de la biología y de la medicina, representan ejemplos paradigmáticos de teorías probabilísticas con datos no corregibles. Finalmente los procesos estocásticos con variables continuas de azar, el tipo de teorías que sólo muy recientemente han hallado en diversos lugares de la ciencia el suyo propio, son los ejemplos naturales de teorías probabilísticas con datos corregibles.

Me parece que el primero y el último tipo de teoría representan un modo ingenuo de pensar sobre el mundo que ciertamente está muy presente en muchas partes de la filosofía. Se trata de un modo de pensar sobre el mundo que exige dos características generales a sus teorías y a sus elementos de juicio. En primer lugar, las teorías deberán ser absolutas; el análisis causal propuesto en las teorías deberá ser definitivo y completo. En segundo lugar, los datos de los experimentos deberán basarse en última instancia en algo perceptualmente cierto y sin ningún componente de error. En el trabajo científico real, incluso en tiempos antiguos, se llegó a la conclusión de que tales objetivos no pueden alcanzarse por completo y que se debe dar una interpretación del error, si bien la tendencia fundamental fue aceptar las teorías como definitivas. La Física de Aristóteles y su interpretación del movimiento de los graves se hallan en gran medida dentro de este esquema, pero esta creencia en conceptos definitivos y en datos no corregibles ha existido también en tiempos modernos. Los *Principia* de Descartes es uno de los mejores ejemplos de la

primera mitad del siglo XVII. Descartes reduce todas las causas del movimiento al simple impacto y parece muy seguro de la creencia de que éste es un modo definitivo de conceptuar la causa del movimiento, o, más exactamente, el cambio de movimiento. Sus esfuerzos por hallar una base firme de certeza perceptual son demasiado conocidos para recordarlos aquí. Descartes tuvo el buen sentido de darse cuenta de que no puede desarrollarse en detalle un programa de absolutismo y certeza para explicar todos los fenómenos físicos y, por tanto, se vio obligado a introducir hipótesis que fueron admitidas claramente como hipótesis en la última parte de los *Principia*. Es aquí donde utilizó su teoría de los vórtices para dar cuenta de los fenómenos físicos más notables. (La incorrección de la mayor parte de la explicación que dio no es ahora problema nuestro.)

Este mismo deseo de absolutismo de conceptos y de certeza en el conocimiento encuentra tal vez su expresión más elaborada en Kant. No sólo la *Crítica de la Razón Pura*, sino también en buena medida *Los Fundamentos Metafísicos de la Ciencia Natural* pretenden demostrar que puede darse una explicación realmente última de las causas en la naturaleza. Esto, que el análisis de la causalidad en la *Crítica* se hace a un nivel muy general, aparece tratado de una forma mucho más detallada y definida en *Los Fundamentos Metafísicos*, donde Kant intenta dar una interpretación sólo en términos de fuerzas de atracción y repulsión. Lo importante, desde el punto de vista filosófico, es que las proposiciones generales aducidas como verdaderas sobre estas causas del movimiento son conocidas a priori y no se basan, bajo ningún aspecto, en experimentos. No es necesario hacer notar que Kant pretende convertir la mecánica clásica en una metafísica sistemática, pero lo que sí me parece importante al menos es subrayar que en su deseo de una base última del conocimiento se hallaba presente una tradición absolutista tan vieja como Platón y de la que ha sido siempre muy difícil librarse.

Incluso un filósofo tan empirista y cauto como John Stuart Mill creyó que por medio de un proceso de investigación científica estricto podríamos encontrar leyes definitivas, y leyes definitivas para él eran leyes de carácter determinista y no probabilísticas. He aquí un texto conocido que resume su punto de vista (Mill [1936], página 318):

«Las consideraciones anteriores nos han llevado a darnos cuenta de la diferencia entre dos tipos de leyes o de uniformidades observadas en la naturaleza —leyes definitivas y las que pueden llamarse leyes derivadas. Las

leyes derivadas son tales que son deducibles de, y pueden, de alguno de los modos que hemos señalado, resolverse en otras distintas y más generales. Definitivas son las leyes que no pueden. No estamos seguros de que alguna de las uniformidades con que estamos familiarizados sea una ley definitiva; pero sabemos que debe haber leyes definitivas y que cada vez que una ley derivada se resuelve en una ley más general nos lleva más cerca de ellas.»

El intento filosófico general de este artículo debe ser ahora evidente. Lo que quiero hacer es esto: considerar las tesis filosóficas clásicas de que se puede dar una interpretación causal absoluta de los fenómenos, de que se puede obtener de los fenómenos naturales una ley definitiva de tipo determinista, y de que es necesario algún fundamento firme de la certeza perceptual para lograr un conocimiento seguro del mundo. Las tres son falsas y definitivamente anticuadas de acuerdo con los tipos de teorías que en la actualidad han llegado a imponerse en la ciencia. En la conversación, al igual que en los asuntos ordinarios, tal certeza y tal absolutismo no son necesarios y son, de hecho, perniciosos para la práctica del buen sentido. No es precisamente de la experiencia común de donde han obtenido su sanción durante tanto tiempo estas erróneas ideas, sino más bien de la antigua tradición religiosa y filosófica.

Hay en algún sitio una preciosa cita de de Finetti en la que, defendiendo el uso Bayesiano de una información previa, aunque no sea cierta, para tomar decisiones, dice que es mejor cimentar sobre la arena que sobre el vacío. Creo que podemos parafrasear esta observación y decir algo pertinente para la filosofía. Cuando se trata del conocimiento, los cimientos reales descansan sobre arena y no sobre roca.

Capítulo 9
MODELOS DE DATOS*

1. Introducción

A casi todos los miembros de este Congreso la noción de modelo de una teoría es demasiado familiar como para que sea necesario revisarla aquí en detalle. Hablando a grandes rasgos, un modelo de una teoría puede definirse como una realización posible en la cual se satisfacen todos los enunciados válidos de la teoría, y una realización posible de una teoría es una entidad con la estructura conjuntista apropiada. Por ejemplo, podemos caracterizar una realización posible de la teoría matemática de grupos como un par ordenado cuyo primer miembro es un conjunto no vacío y cuyo segundo miembro es una operación binaria sobre ese conjunto. Una realización posible de la teoría de grupos es un modelo de la teoría si los axiomas de la teoría son satisfechos en la realización, ya que en este caso (lo mismo que en muchos otros), los enunciados válidos de la teoría son definidos como

---

* Publicado originalmente en *Logic, Methodology and Philosophy of Science: Proceedings of the 1960 International Congress*, editado por E. Nagel, P. Suppes y A. Tarski, Stanford University Press, Stanford, Calif., 1962, pp. 252-261. Versión castellana por Mario Alberto Cortez Rodríguez.

aquellos enunciados que son consecuencias lógicas de los axiomas. Para proveer completa flexibilidad matemática hablaré de teorías axiomatizadas en una teoría de conjuntos general mediante la definición de un predicado conjuntista apropiado (vgr., «es un grupo») más bien que de teorías axiomatizadas directamente en la lógica de primer orden como un lenguaje formal. Para los propósitos de este artículo, esta diferencia no es crítica. En el caso conjuntista, es conveniente hablar algunas veces de los predicados apropiados a ser satisfechos por una realización posible. Pero cualquiera que sea el sentido de formalización que se use, se aplica esencialmente la misma noción lógica de modelo[1].

Es mi opinión que esta noción de modelo es la única fundamental para las ciencias empíricas lo mismo que para las matemáticas. Afirmar esto no es negar un lugar a los usos variantes de la palabra «modelo» por los científicos empíricos como, por ejemplo, cuando un físico habla acerca de un modelo físico o un psicólogo se refiere a una teoría cuantitativa de la conducta como un modelo matemático. En esta ocasión no quiero abogar por este carácter fundamental de la noción lógica de modelo, pues ya traté de demostrarlo en detalle en el Coloquio en Utrecht, en enero pasado, patrocinado también por la Unión Internacional de Historia y Filosofía de la Ciencia (Suppes [1960])[2]. Quizá el argumento más convincente que podría escogerse para ser mencionado aquí es que la noción de modelo usada en cualquier tratamiento estadístico serio de una teoría y su relación con el experimento no difiere en ninguna manera esencial de la noción lógica de modelo.

El centro del presente artículo está estrechamente conectado al análisis estadístico de la adecuación empírica de las teorías. Lo que quiero tratar de mostrar es que el análisis exacto de la relación entre teorías empíricas y datos relevantes precisa de una jerarquía de modelos de diferente tipo lógico. Hablando en general, en las matemáticas puras la comparación de modelos involucra una comparación de dos modelos del mismo tipo lógico, como en la enunciación de teoremas de representación. Una situación radicalmente diferente se obtiene con frecuencia en la comparación de la teoría y el experimento. En la teoría se usan nociones teóricas que no tienen un análogo

[1] Para una discusión detallada de la axiomatización de las teorías dentro de la teoría de conjuntos, ver Suppes (1957), cap. 12.

[2] Capítulo 8 de esta Antología.

directo observable en los datos experimentales. Además, es común que los modelos de una teoría contengan funciones continuas o secuencias infinitas aunque los datos confirmatorios son de carácter altamente discretos y finitistas.

Quizá puedo describir adecuadamente la clase de ideas en las que estoy interesado de la siguiente manera. Correspondiendo a realizaciones posibles de la teoría, introduzco realizaciones posibles de los datos. Los modelos de los datos de un experimento son definidos entonces en la forma acostumbrada en términos de las realizaciones posibles de los datos. Como debe ser evidente, desde un punto de vista lógico, las realizaciones posibles de los datos son definidas precisamente de la misma manera que las realizaciones posibles de la teoría que está siendo sometida a prueba por el experimento del cual surgen los datos. La definición precisa de los modelos de los datos para cualquier experimento dado requiere que haya una teoría de los datos en el sentido del procedimiento experimental, así como en el sentido ordinario de la teoría empírica de los fenómenos que están siendo estudiados.

Antes de analizar algunas de las consecuencias y problemas de este punto de vista, puede ser útil dar más concreción a nuestras ideas considerando un ejemplo.

2. Ejemplo de la teoría del aprendizaje

He escogido deliberadamente un ejemplo de la teoría del aprendizaje porque es conceptualmente simple, no es matemáticamente trivial y es totalmente probabilista. Más particularmente, consideraré la teoría de la respuesta lineal tal y como fue desarrollada por Estes y yo mismo (1959). Para simplificar la presentación de la teoría de una manera no esencial, supongamos que en cada ensayo el organismo en la situación experimental puede hacer exactamente una de las dos respuestas A_1 o A_2, y que después de cada respuesta recibe un reforzamiento, E_1 o E_2, de una de las dos respuestas posibles. Un resultado experimental posible en el sentido de la teoría es una secuencia infinita de pares ordenados, donde el n-ésimo término de la secuencia representa la respuesta observada —el primer miembro del par— y el reforzamiento real —el segundo miembro del par— en el ensayo n del experimento.

Una realización posible de la teoría es una terna ordenada $\chi = \langle X,$

$P, \theta\rangle$ del siguiente tipo. El conjunto X es el conjunto de todas las secuencias de pares ordenados tales que el primer miembro de cada par es un elemento de algún subconjunto A y el segundo miembro es un elemento de algún subconjunto B, donde A y B tienen cada uno dos elementos. El conjunto A representa las dos respuestas posibles y el conjunto B los dos reforzamientos posibles. La función P es una medida de probabilidad sobre el campo de Borel más pequeño que contiene el campo de los conjuntos cilíndricos de X y θ, un número real en el intervalo $0 < \theta \leqq 1$, es el parámetro de aprendizaje. (Cierto es que para las teorías cuyos modelos tengan una estructura más complicada, la definición de una realización posible es un tanto arbitraria, pero ésta no es una cuestión que afecte en manera alguna el desarrollo de las ideas centrales de este artículo.)

Hay dos respectos obvios bajo los cuales una realización posible de la teoría no puede ser una realización posible de los datos experimentales. El primero es que ningún experimento real puede incluir un número infinito de ensayos discretos. El segundo es que el parámetro θ no es directamente observable y no es parte de los datos registrados.

Para perseguir relaciones ulteriores entre la teoría y el experimento, es necesario establecer los axiomas de la teoría, i. e., definir los modelos de la teoría. Para este propósito se necesita cierta cantidad de notación. Sea $A_{i,n}$ el suceso de respuesta A_i en el ensayo n, $E_{j,n}$ el suceso de reforzamiento E_j en el ensayo n, donde $i, j = 1, 2$ y para cada x en X sea x_n la clase de equivalencia de todas las secuencias en X que son idénticas con x a través del ensayo. Una realización posible de la teoría de respuesta lineal es entonces un modelo de la teoría si satisface en la realización los siguientes dos axiomas:

Axioma 1. Si $P(E_{i,n}A_{i',n}x_{n-1}) > 0$ entonces
$$P(A_{i,n+1}|E_{i,n}A_{i',n}x_{n-1}) = (1 - \theta)P(A_{i,n}|x_{n-1}) + \theta.$$
Axioma 2. Si $P(E_{j,n}A_{i',n}x_{n-1}) > 0$ y $i \neq j$ entonces
$$P(A_{i,n+1}|E_{j,n}A_{i',n}x_{n-1}) = (1 - \theta)P(A_{i,n}|x_{n-1}).$$

El primer axioma afirma que cuando una respuesta es reforzada, la probabilidad de producir esta respuesta en el siguiente ensayo es incrementada por una transformación lineal simple. El segundo axioma afirma que cuando una respuesta diferente es reforzada, la probabilidad de producir la respuesta decrece por una segunda transformación lineal. Para aquellos que esten interesados en la base psicológica de esta teoría, puede enfatizarse que es derivable de una teoría mucho

más complicada que supone procesos de muestreo de estímulos y condicionamiento. La teoría de respuesta lineal es el caso límite de la teoría de muestreo de estímulos cuando el número de estímulos se aproxima al infinito.

Para lograr una precisión aún mayor, será conveniente considerar una clase particular de experimentos a la cual ha sido aplicada la teoría de respuesta lineal, a saber, aquellos experimentos con programas de reforzamiento contingente simple. En todo ensayo, si se obtiene una respuesta A_1, la probabilidad de un reforzamiento E_1 es π_1, independientemente del número del ensayo u otros sucesos anteriores. Si se obtiene una respuesta A_2, la probabilidad de un reforzamiento E_2 es π_2. Así, en resumen, para toda n

$$P(E_{1,n}|A_{1,n}) = \pi_1 = 1 - P(E_{2,n}|A_{1,n}),$$
$$P(E_{2,n}|A_{2,n}) = \pi_2 = 1 - P(E_{1,n}|A_{2,n}).$$

Esta caracterización de los programas de reforzamiento contingente simple se ha hecho en el lenguaje de la teoría, ya que es necesario para computar predicciones teóricas. Esto no es posible para los detalles más finos del experimento. Supongamos que el experimentador decide sobre 600 ensayos para cada sujeto. Una breve descripción del aparato experimental iría como sigue. (Cfr. Suppes y Atkinson [1960], pp. 81-83.)

El sujeto se sienta en una mesa de altura estándar. Fijado verticalmente enfrente del sujeto está un tablero opaco. Dos llaves silenciosas (respuestas A_1 y A_2) están montadas en la base del tablero separadas por 20 cm. Tres luces blancas están sobre el tablero. Una de esas luces, que sirve como señal para que el sujeto responda, se encuentra centrada entre las llaves a la altura de los ojos del sujeto. Cada una de las otras dos luces, los sucesos de reforzamiento E_1 y E_2, se fija directamente sobre una de las llaves. En todos los ensayos la señal de luz permanece encendida 3,5 seg.; el tiempo entre exposiciones sucesivas de señales es de 10 seg. Una luz de reforzamiento llega en 1,5 seg. después de que la señal de luz ha terminado y permanece encendida por 2 seg.

No es sorprendente que esta descripción del aparato no se incorpora a la teoría en absoluto de ninguna manera directa. El punto importante es tomar la teoría de respuesta lineal y esta descripción como dos extremos entre los cuales ha sido fijada una jerarquía de teorías y sus modelos mediante un análisis detallado.

En la clase de experimentos que estamos considerando, el experimentador registra solamente la respuesta producida y el reforzamiento dado en cada ensayo. Esto sugiere la definición de las realizaciones posibles de la teoría que es el primer escalón abajo del nivel abstracto de la teoría de respuesta lineal misma. Llamaré a esta teoría la *teoría del experimento*, término que no debe considerarse como refiriéndose a lo que los estadísticos llaman la teoría del diseño experimental —un tópico que será mencionado más tarde—. Una realización posible de la teoría del experimento es un par ordenado $\zeta = \langle Y, P \rangle$, donde (i) Y es un conjunto finito compuesto de todas las secuencias finitas de longitud 600 con pares ordenados como términos de las secuencias, como antes, el primer miembro de cada par es extraído de algún conjunto de pares A y correspondientemente para los segundos miembros, y (ii) la función P es una medida de probabilidad sobre el conjunto de todos los subconjuntos de Y.

Una realización posible $\zeta = \langle Y, P \rangle$ de la teoría del experimento es un modelo de la teoría si la medida de probabilidad P satisface la condición definitoria para un programa de reforzamiento contingente simple. Los modelos del experimento así definidos son entidades aún muy distantes de los datos reales. Las secuencias finitas que son elementos de Y podrían ciertamente ser usadas para representar cualquier resultado experimental posible, pero en un experimento con, digamos, 40 sujetos, las 40 secuencias observadas son una parte insignificante de las 4^{600} secuencias en Y. Consecuentemente, se necesita un modelo más cercano a la situación real para representar las frecuencias condicionales relativas de reforzamiento usadas.

La realización apropiada para este propósito parece ser una N-tupla Z de elementos de Y, donde N es el número de sujetos en el experimento. Se elige una N-tupla más bien que un subconjunto de Y por dos razones. La primera es que si se elige un subconjunto no hay manera directa de indicar que dos sujetos distintos tienen exactamente la misma secuencia de respuestas y reforzamientos —cierto que es un suceso altamente improbable—. La segunda, y más importante razón, es que la N-tupla puede usarse para representar la secuencia de tiempo en la cual los sujetos estuvieron en el ensayo, un punto de cierto interés al considerar ciertas cuestiones de detalle del diseño experimental. Puede observarse que al usar una N-tupla como una realización de los datos más bien que una entidad más complicada que podría ser usada para expresar los tiempos reales en los que los sujetos estuvieron en el ensayo del experimento, hemos dado, aún, otro paso

de abstracción y simplificación, lejos de la complejidad desconcertante de los fenómenos experimentales completos[3].

La siguiente cuestión es ¿cuándo una realización posible de los datos es un modelo de los datos? La respuesta completa, tal como la veo, requiere de una teoría estadística detallada de la buena adecuación. Hablando a grandes rasgos, una realización N-tupla es un modelo de los datos si las frecuencias condicionales relativas de los reforzamientos E_1 y E_2 se adecuan lo suficiente a la medida de probabilidad P del modelo del experimento. Sería inapropiado examinar aquí las pruebas estadísticas en detalle para esta bondad de la adecuación, pero será instructivo esbozar algunas de las principales consideraciones de la complejidad de los asuntos involucrados. Lo primero que hay que notar es que ninguna prueba única simple de la bondad de la adecuación garantizará que una realización posible Z de los datos es un modelo adecuado de los datos. La clase de problemas que surgen son estos: (i) (Homogeneidad) ¿Son las frecuencias condicionales relativas (F.C.R.) de reforzamiento aproximadamente π_i o $1 - \pi_i$, según puede ser el caso para cada sujeto? Para responder esto debemos comparar miembros de la N-tupla Z. (ii) (Inmovilidad) ¿Son constantes las F.C.R. de reforzamiento durante los ensayos? Para responder esto prácticamente sumamos sobre los sujetos, i. e., sobre miembros de Z, para obtener datos suficientes para una prueba. (iii) (Orden) ¿Son las F.C.R. de reforzamiento independientes de reforzamientos y respuestas anteriores? Para responder esto necesitamos mostrar que las F.C.R. definen un proceso de orden cero —estas correlaciones seriales de todo orden son cero—. Nótese, por supuesto, que el orden cero es con respecto a los sucesos condicionales E_i dados A_j, para $i, j = 1, 2$. Estas tres cuestiones no son exhaustivas en manera alguna; no reflejan consideraciones centrales. Para indicar su carácter esencialmente formal, puede ser útil esbozar su formulación en una estructura estadística relativamente clásica. Hablando a grandes rasgos, el planteamiento es como sigue. Para cada realización posible Z de los datos, definimos una estadística $T(Z)$ para cada cuestión. Esta estadística es una variable aleatoria con una probabilidad de distribución —preferentemente una distribución que es (asintóticamente) independiente de las F.C.R. reales, bajo la hipótesis nula de que Z es

[3] El carácter exacto de un modelo ζ del experimento y un modelo Z de los datos no está determinado unívocamente por el experimento. Sería posible, por ejemplo, definir ζ en términos de N-tuples.

un modelo de los datos. En terminología estadística, «aceptamos» la hipótesis nula si el valor obtenido de la estadística $T(Z)$ tiene una probabilidad igual o más grande que algún nivel significativo α bajo la suposición de que en realidad la hipótesis nula es verdadera.

Para las cuestiones de homogeneidad, inmovilidad y orden establecidas arriba, sería apropiado una máxima de verosimilitud o estadísticas *ji*-cuadradas. No hay espacio adecuado para discutir detalles, pero esas estadísticas son estándar en la literatura. Para los propósitos de este artículo no es importante que algunos subjetivistas como L. J. Savage podrían criticar el uso liberal de tales pruebas clásicas. Una advertencia más pertinente es que la satisfacción conjunta de las tres pruebas estadísticas (por «satisfacción» quiero decir la aceptación de la hipótesis nula con un nivel de significación $\geqq 0{,}05$) correspondientes a las tres cuestiones, intuitivamente no parecen ser completamente suficientes para que una realización posible Z sea un modelo de los datos[4]. No se hizo ninguna afirmación al enumerar esas tres cuestiones, pero podría también cuestionarse qué posibilidades realistas hay de elaborar una lista finita de pruebas estadísticas que pueden considerarse como conjuntamente suficientes para que Z sea un modelo de los datos. Un experimentador escéptico no formalista podría preten-

[4] Una definición más explícita de los modelos de datos, para usarse en este punto, iría algo así. Z es un modelo N-doble de los datos del experimento ζ si y sólo si hay un conjunto Y y una medida de probabilidad P sobre un subconjunto de Y tal que $\zeta = \langle Y, P\rangle$ es un modelo de la teoría del experimento, Z es un N-tuple de elementos de Y y Z satisface las pruebas estadísticas de homogeneidad, inamovilidad y orden. Una definición formal completa detallaría las pruebas estadísticas en términos matemáticos exactos. Por ejemplo, una prueba *ji*-cuadrada de homogeneidad para E_1 reforzamientos siguiendo A_1 respuestas sería formulada como sigue. Sea N_j el número de A_1 respuestas (excluyendo el último ensayo) para el sujeto j, i. e., como está registrado en Z_j —el j-ésimo miembro de la N-tupla Z— y sea v_j el número de E_1 reforzamientos siguiendo A_1 respuestas para el sujeto j. Entonces:

$$\chi^2_H = \sum_{j=1}^{N} \frac{(v_j - N_j\pi_1)^2}{N_j\pi_1} + \frac{(N_j - v_j - N_j(1-\pi_1))^2}{N_j(1-\pi_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \frac{(v_j - N_j\pi_1)^2}{N_j\pi_1(1-\pi_1)}$$

y esta χ^2 tiene N grados de libertad. Si el valor $\chi^2_H(Z)$ tiene una probabilidad mayor que 0,05, se acepta la hipótesis nula, i. e., con respecto a la homogeneidad Z es satisfactoria.

der que dado cualquier conjunto utilizable de pruebas, él podría producir un programa de reforzamiento condicional que satisfaría las pruebas y no obstante ser intuitivamente insatisfactorio. Por ejemplo supóngase que las pruebas estadísticas para el orden fueran construidas para examinar efectos de un orden no mayor que cuatro, entonces el experimentador escéptico podría construir una realización posible Z con un patrón no aleatorio de orden cinco. En realidad, el procedimiento usado en los experimentos bien construidos hace tal evasión más bien difícil. La práctica es obtener las F.C.R. de alguna tabla publicada de números aleatorios cuyas propiedades han sido completamente investigadas por un amplio grupo de pruebas estadísticas. Desde el punto de vista sistemático metodológico, no es importante que el experimentador mismo lleve a cabo las pruebas sobre Z.

Por otro lado, en la literatura experimental relevante para nuestro ejemplo, sucede en realidad que se necesita tener mucho más cuidado para garantizar que una realización posible Z de los datos es realmente un modelo de los datos para el experimento entre manos. Un ejemplo típico es la práctica de la aleatoriedad restringida. Para ilustrar, si $P(E_{1,n}|A_{1,n}) = 0{,}6$, entonces algunos experimentadores podrían acordar que en cada bloque de 10 respuestas A_1, exactamente 6 estarían seguidas por reforzamientos E_1, un resultado que debería tener una probabilidad de aproximadamente cero para un amplio número de pruebas[5].

La objeción más importante del experimentador escéptico a la importancia de los modelos de los datos no ha sido examinada aún. La objeción consiste en que el análisis preciso de esos modelos incluye solamente una porción pequeña de los muchos problemas del diseño experimental. Por ejemplo, por muchos cánones del diseño experimental, la asignación de A_1 a la izquierda (o a la derecha) de cada sujeto sería un error. Más generalmente, el uso de un cuarto experimental en el cual hubiera considerablemente más luz a la izquierda de los sujetos que a la derecha sería considerado erróneo. Sin embargo, hay una diferencia en estos dos ejemplos. La asignación de A_1 a la izquierda o a la derecha de cada sujeto es una información que puede

[5] Es pertinente recordar, para enfatizar que conceptualmente no hay nada especial acerca de este ejemplo artificial escogido de la teoría del aprendizaje, que análisis mucho más elaborados de las fuentes del error experimental son comunes en los experimentos físicos complicados. En la literatura de la teoría del aprendizaje todavía es insuficiente reportar el tipo de pruebas estadísticas descritas arriba, las cuales juegan un papel análogo al resumen de los físicos de los errores experimentales.

ser fácilmente incorporada en los modelos de los datos —y pueden establecerse requisitos de aleatoriedad—. La información detallada acerca de la distribución de los parámetros físicos que caracterizan el medio ambiente experimental no es un asunto simple para ser incorporado en los modelos de los datos y usualmente no es registrada en la literatura; hablando a grandes rasgos, algunas condiciones generales *ceteris paribus* se supone que se cumplen.

Sin embargo, la caracterización de los modelos de datos no está realmente determinada por la información relevante acerca del diseño experimental, la cual puede formalizarse fácilmente. En un sentido, difícilmente encontramos algún límite a la información de esta clase; puede ir desde fases de la Luna a datos del C. I. de los sujetos.

Pienso que la idea central que corresponde perfectamente a una distinción tosca pero generalmente clara hecha por los experimentadores y los estadísticos, es restringir los modelos de los datos a aquellos aspectos del experimento que tengan un análogo paramétrico en la teoría. Un modelo de los datos está diseñado para incorporar toda la información acerca del experimento que pueda ser usada en pruebas estadísticas de la adecuación de la teoría. El punto que quiero establecer no puede precisarse tan simple o fácilmente como desearía.

TABLA 1. *Jerarquía de teorías, modelos y problemas*

Teoría de	*problemas típicos*
los modelos de respuesta lineal	estimación de θ, bondad de la adecuación de los modelos de datos
los modelos del experimento	número de pruebas, elección de parámetros experimentales
diseño experimental	homogeneidad, inmovilidad, adecuación de los parámetros experimentales
condiciones *ceteris paribus*	ruidos, iluminaciones, olores, fases de la Luna.

La Tabla 1 tiene la intención de indicar una jerarquía posible de teorías, modelos y problemas que surgen en cada nivel para acosar al

científico. He colocado a las condiciones *ceteris paribus* en el nivel más bajo. Aquí está ubicada toda consideración intuitiva del diseño experimental que no involucra estadísticas formales. Aquí se lleva el control de ruidos fuertes, malos olores, tiempos del día o de la estación. En el siguiente nivel entran problemas formales del diseño experimental, pero del tipo que excede con mucho los límites de la teoría particular que está siendo puesta a prueba. La aleatoriedad de A_1 como la respuesta izquierda o derecha es un problema de este nivel, así como lo es la asignación aleatoria de los sujetos a diferentes grupos experimentales. Todas las consideraciones que entran en este nivel pueden ser formalizadas, y su relación con los modelos de datos, que están en el siguiente nivel, puede hacerse explícita —en contraste con el número aparentemente ilimitado de condiciones *ceteris paribus* no establecidas.

En el siguiente nivel entran los modelos del experimento. Ellos sostienen la relación ya resaltada con los modelos de datos. Finalmente, en la cima de la jerarquía están los modelos de respuesta lineal, relativamente más distantes de la experiencia experimental concreta. Nótese que los modelos de respuesta lineal están relacionados directamente con los modelos de datos, sin consideración explícita de los modelos del experimento. También es importante enfatizar una vez más que el criterio para decidir si una realización posible de los datos es un modelo de los datos no depende en manera alguna de su relación con un modelo de respuesta lineal. Estos criterios son para determinar si el experimento estuvo bien manejado y no para decidir si la teoría de respuesta lineal tiene méritos.

La dependencia es realmente al revés. Dado un modelo de los datos, preguntamos si hay un modelo de respuesta lineal con el cual sostenga una relación de adecuación satisfactoria. La racionalidad de una probabilidad máxima estimada de θ es fácilmente establecida en este contexto: dados los parámetros experimentales π_1 y π_2, buscamos este modelo de respuesta lineal, i. e., el modelo de respuesta lineal con parámetros de aprendizaje, lo que llevará a la máxima probabilidad de los datos observados, como están dados en el modelo de datos.

Es necesario dejar en este momento la más bien aguda discusión de este ejemplo de la teoría del aprendizaje, pero hay un punto central que no ha sido suficientemente mencionado. El análisis de la relación entre teoría y experimento debe proceder a cada nivel de la jerarquía mostrada en la Tabla 1. En todas partes se tropieza uno con dificultades, pero el nivel más alto refleja debilidades en el experimento, no en

la teoría fundamental del aprendizaje. Desafortunadamente no es posible dar aquí citas de la literatura experimental de experimentos mal concebidos o pobremente ejecutados que son aceptados para invalidar la teoría que presumen poner a prueba, pero de hecho no lo hacen.

3. La teoría de modelos en las ciencias empíricas

Empezaré diciendo que he querido tratar de mostrar que el análisis exacto de la relación entre teorías empíricas y datos relevantes precisa de una jerarquía de modelos de tipos lógicos diferentes. El examen del ejemplo de la teoría del aprendizaje tenía la intención de exhibir algunos aspectos de esta jerarquía. Me gustaría terminar con algunas consideraciones más generales que son sugeridas parcialmente por este ejemplo.

Un punto que ocupó mi atención fue mostrar que al ir del nivel de la teoría al nivel del experimento, no necesitamos abandonar métodos formales de análisis. Desde un punto de vista conceptual la distinción entre matemáticas puras y aplicadas es espúrea —ambas tratan con entidades conjuntistas, y lo mismo es verdadero de la teoría y el experimento—.

Es una contribución fundamental de la estadística matemática moderna haber reconocido la necesidad explícita de un modelo al analizar la significación de los datos experimentales. Es una paradoja del método científico que las ramas de la ciencia empírica que tienen el menor de los desarrollos teóricos sustanciales, frecuentemente tengan los métodos más sofisticados de evaluar evidencia. En tales ramas altamente empíricas de la ciencia, no es necesaria una jerarquía de modelos, ya que la teoría que está siendo puesta a prueba no es una teoría con una estructura lógica genuina, sino una colección de ideas heurísticas. Los únicos modelos necesarios son algo así como los modelos del experimento y los modelos de datos discutidos en conexión con el ejemplo de la teoría del aprendizaje.

La metodología estadística actual es menos adecuada cuando una teoría genuina está en juego. La jerarquía de modelos esbozada en nuestro ejemplo corresponde de una manera muy tosca a los conceptos estadísticos de un espacio de muestra, una población y una muestra. Mi opinión personal es que el uso explícito y exacto del concepto lógico de modelo resultará ser un recurso altamente útil en

la clarificación de la teoría del diseño experimental, a la que muchos estadísticos aún consideran como un «arte» más que como una «ciencia». Limitaciones de espacio me han impedido elaborar las relaciones formales entre la teoría del diseño experimental y la teoría de modelos de datos, tal y como las concibo.

Sin embargo, mis ambiciones para la teoría de modelos en las ciencias empíricas no son enteramente de esta índole práctica. Uno de los vicios habituales de los filósofos de la ciencia es simplificar demasiado la estructura de la ciencia. Los filósofos que escriben acerca de la representación de las teorías científicas como cálculos lógicos pasan después a decir que al proveer interpretaciones o definiciones coordinativas para algunos de los términos primitivos o definidos del cálculo, le es dado significado empírico a una teoría. Lo que yo he intentado argüir es que se establece una jerarquía completa de modelos entre los modelos de la teoría básica y la experiencia experimental completa. Más aún, para cada nivel de la jerarquía, hay una teoría por propio derecho. A la teoría de cierto nivel le es dado significado empírico al hacer conexiones formales con la teoría en un nivel más bajo. La investigación estadística o lógica de las relaciones entre las teorías en esos niveles diferentes puede proceder de una manera puramente formal, conjuntista. A mayor explicitud en el análisis, menor lugar hay para consideraciones no formales. Una vez que los datos empíricos son puestos en forma canónica (en el nivel de modelos de datos en la Tabla 1), toda discusión de evaluación sistemática que surja es una cuestión formal. Es importante notar que las cuestiones a resolver son formales, pero no matemáticas —no matemáticas en el sentido de que sus respuestas no se siguen en general de los axiomas de la teoría de conjuntos (o algún otro marco conceptual estándar de las matemáticas)—. Precisamente el problema fundamental del método científico consiste en establecer los principios de la metodología científica que han de ser usados para responder esas cuestiones —cuestiones de medición, bondad de adecuación, estimación de parámetros, identificabilidad y cosas por el estilo. Los principios necesarios son enteramente de carácter formal en el sentido de que ellos tienen como objeto de estudio, modelos conjuntistas y sus comparaciones. En realidad, la línea de argumento que he tratado de seguir en este artículo conduce a la conclusión de que los únicos resultados sistemáticos posibles en la teoría de la metodología científica son puramente formales, aunque no puede hacerse aquí una defensa general de esta conclusión.

Capítulo 10
MEDICION: PROBLEMAS TEORICOS Y DE APLICACION*

Perspectiva general

Comenzamos con procedimientos de medición que son fundamentales en el sentido de que no suponen resultados numéricos previos. En la mayoría de los casos podemos representar la situación empírica por un conjunto A, que es el conjunto de objetos o fenómenos bajo consideración, y una secuencia finita de relaciones finitarias R_i sobre este conjunto. Ordinariamente se llama a tal objeto, $\chi = \langle A, R_1, \ldots, R_n \rangle$, una estructura relacional. He escogido deliberadamente relaciones en vez de operaciones para representar los procedimientos experimentales o de medición de un carácter fundamental, porque cuando consideramos procedimientos reales, las propiedades de clausura tan características de las operaciones matemáticas ordinarias nos conducen claramente a idealizaciones infinitistas que no son idealizaciones felices para muchas aplicaciones de la medición. Por ejemplo, si imponemos una condición de clausura sobre nuestra álgebra de

---

* Publicado originalmente en *Mathematics in the Social Sciences in Australia*, Camberra: Australian Government Publishing Service, 1972, pp. 613-622. Versión castellana de José Luis Rolleri.

operaciones para la medición de la longitud, nos comprometemos casi a la vez a postular la existencia de longitudes de tamaño arbitrariamente mayor. Si usamos las relaciones en lugar de las operaciones, ningún compromiso tal se adquiere, y podemos restringir las consideraciones a conjuntos finitos y estructuras relacionales finitas. (Por una estructura relacional finita, quiero decir una estructura relacional en la que el conjunto básico A de objetos es finito.)

En esta perspectiva general, dos problemas formales deben ser resueltos para cualquier procedimiento fundamental de medición o teoría fundamental de medición. Desde un punto de vista formal o matemático, caracterizamos la clase de estructuras relacionales que satisfacen el procedimiento empírico o la teoría estableciendo los axiomas que deben satisfacerse por cada estructura. El primer problema formal es entonces demostrar un teorema de representación para cualquier estructura que satisface los axiomas. Ordinariamente, para llamar a una teoría una teoría de medición, este teorema de representación debe mostrar que cualquier estructura que satisface los axiomas puede mapearse homomórficamente en los números reales. No es crítica la restricción a los números reales. Sí lo es mapear en una estructura cercanamente relacionada a los números reales. Por ejemplo, en el caso de escalas multidimensionales, lo que es deseable es un mapeo en un espacio euclideano n-dimensional más bien que en el conjunto de los números reales mismos. Una cuestión acerca del teorema de representación necesita clarificación. Cuando las estructuras son finitas no hay problema en mapearlas en los números reales con algunas relaciones arbitrarias en los números reales. El interés del problema está más bien en proveer por anticipado las relaciones numéricas en términos de las cuales deben definirse las estructuras numéricas. El homomorfismo entonces debe ser relativo a esas relaciones numéricas dadas.

El segundo problema formal es el de la unicidad. ¿Cómo es único el homomorfismo que mapea una estructura dada en los números reales? En la teoría clásica de medición de la masa o de la distancia, por ejemplo, tenemos la expectativa de que el mapeo sea único salvo una transformación positiva de similitud.

Esta manera de ver a las teorías de la medición no es especial en ningún sentido al dominio de los procedimientos de medición. En todas las áreas de la matemática, es estándar buscar teoremas de representación para estructuras de interés primario y también preguntar acerca de la unicidad de las representaciones obtenidas. El profesor

Blakers ya ha mencionado el ejemplo clásico familiar, a saber, el teorema de representación para la geometría plana en términos de coordenadas cartesianas y la demostración de que esta representación es única hasta el grupo de los movimientos euclideanos. En el contexto de la discusión presente tal vez tenga más valor mencionar que la geometría sintética clásica puede ser axiomática de una manera elemental como una estructura relacional. El conjunto básico A es el conjunto de los puntos y las dos relaciones que definimos sobre el conjunto A son la relación ternaria de «estar entre» *(betweeness)* entre puntos y la relación cuaternaria de equidistancia. La relación de equidistancia significa que la distancia entre los puntos x e y es la misma que la distancia entre los puntos u y v.

Aún otro ejemplo de considerable interés físico se encuentra en la relación entre medición y la teoría especial de la relatividad. En este caso, tiene mayor interés el teorema de unicidad que el de representación. Podemos mostrar, por ejemplo, que la preservación de la longitud relativista de segmentos inerciales es la única suposición requerida para demostrar que cualesquiera dos marcos inerciales están relacionados por transformaciones de Lorentz (Suppes (1959a)). Más recientemente, Zeeman (1964) ha mostrado que una suposición ligeramente más fuerte acerca del número de las dimensiones ($n \geq 3$) es posible postular que el orden parcial temporal de los puntos es preservado para obtener las transformaciones de Lorentz. Desde el punto de vista de la teoría de la medición, es interesante encontrar que no se requiere ninguna física adicional para derivar las transformaciones de Lorentz.

He mencionado esos ejemplos de geometría y relatividad porque ha habido una tendencia reciente en la literatura sobre la teoría de la medición a aislarse de otros dominios de la ciencia y considero esto desafortunado en vista de las cercanas conexiones del tipo recién descritos.

Condiciones generales y suficientes

Si emprendemos formular una teoría fundamental de medición, reconoceremos que es importante e interesante establecer axiomas que son no sólo suficientes, sino también necesarios. Tales axiomas nos dan un sentido mejor para comprender la naturaleza de la teoría. Hay también más razones prácticas de aplicación para buscar condi-

ciones necesarias y suficientes. Al considerar colecciones de objetos de un tipo similar cuyas propiedades han de ser medidas, no queremos restringir las colecciones de objetos debido a suposiciones existenciales extrañas. Naturalmente preguntamos, ¿cuáles son las condiciones mínimas que podemos asumir para garantizar la existencia de una medición? Condiciones existenciales, por ejemplo, que son suficientes pero no necesarias, que indebidamente restringen el rango de estructuras que caen dentro de la teoría. Buscar condiciones necesarias y suficientes es buscar una caracterización esquelética desnuda de todas las estructuras que intuitivamente deben ser llevadas dentro del marco conceptual de la teoría.

En este punto puede ser útil ver un ejemplo simple. Considere estructuras binarias, es decir, estructuras que consisten de un conjunto A y una relación binaria R sobre este conjunto. Es natural preguntar cuáles condiciones necesarias y suficientes existen para hacer a una estructura binaria homomórfica a una estructura numérica $\chi = \langle N, < \rangle$, donde N es el conjunto de los números reales y $<$ es la relación numérica usual menor que restringida a N. Si el conjunto A es finito, la respuesta es simple. La relación R debe ser precisamente asimétrica, transitiva y conexa sobre A. Esto es, los tres siguientes axiomas deben satisfacerse en la estructura. Para toda x, y y z en A:

Axioma 1. Si xRy entonces no es el caso que yRx.
Axioma 2. Si xRy y yRz, entonces xRz.
Axioma 3. Si $x \neq y$ entonces xRy o yRx.

En el caso finito, la demostración de la necesidad y la suficiencia es obvia y no requiere de discusión adicional.

Si relajamos la restricción de que el conjunto A sea finito, entonces los tres axiomas ya no son suficientes, sino sólo necesarios. Para ver que los axiomas no son suficientes, observamos que tienen modelos de cardinalidad arbitrariamente alta. Cuando una relación R satisface esos tres axiomas, sin embargo, cualquier homomorfismo debe ser también un isomorfismo, pero no puede haber una función uno a uno que incruste *(imbedding)* modelos de cardinalidad infinita arbitrariamente larga en los números reales. Para incrustar un orden tal en los números reales, debemos agregar una condición adicional. En el caso presente, una respuesta relativamente simple está a la mano. Un orden que satisface los tres axiomas anteriores debe tener también un subconjunto ordenado denso contable, en caso de que el conjunto A sea infinito. Sin embargo, esta condición para el caso infinito no es

realmente interesante, desde el punto de vista de la teoría de la medición.

Debido a que las condiciones necesarias y suficientes son tan obvias y simples para órdenes finitos, inicialmente podríamos esperar que la situación fuera la misma o casi la misma para estructuras relacionales ligeramente más complejas que los órdenes. La siguiente clase simple a considerar es la de los órdenes sobre diferencias así como órdenes sobre los objetos mismos. Por ejemplo, en un experimento psicológico, podríamos pedir a los sujetos que juzguen si el tono x es más cercano en grado a y de lo que el tono u es a v. En otras palabras, pedimos al sujeto que haga juicios tanto acerca de las diferencias como del orden. Con más generalidad, podemos pensar en pedir juicios de similitud relativa, es decir, el juicio de que x es al menos tan similar a y como u lo es a v. El mapeo f valuado en los reales que queremos para tal relación cuaternaria D es este:

$$xyDuv \text{ si y sólo si } f(x) - f(y) \precsim f(u) - f(v) \qquad (1)$$

Teniendo esta representación en mente, llamaremos a una estructura relacional que consiste en un conjunto A y una relación cuaternaria D que satisface esta condición una *estructura de diferencia*. El problema consiste en encontrar las condiciones necesarias y suficientes elementales que una estructura de diferencia debe satisfacer para garantizar la existencia de una función de medición f tal.

Como en el caso de los órdenes, restringámonos a conjuntos finitos y preguntemos qué género de condiciones necesarias y suficientes queríamos encontrar. Lo simple acerca de los axiomas de orden es que podemos comprobar una estructura binaria viendo si satisface los axiomas observando no más que triplos de objetos. Para comprobar la asimetría y la conexidad, sólo se necesita examinar pares de objetos. Para comprobar la transitividad, se requiere inspeccionar triplos de objetos para determinar si hay triadas intransitivas.

Podemos esperar que la situación sea algo más compleja para las estructuras de diferencia, pero aún será de valor como un primer paso, buscar generalizaciones de la transitividad. Por ejemplo, la transitividad de diferencias, la cual requeriría seis variables para expresarse, demandaría una revisión de sextuplas de objetos en el conjunto A para ver si las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de una medición podrían ser establecidas de una manera relativamente simple, especialmente de una manera que podría ser comprobada o a

mano o con un programa simple de computadora. Sería deseable tener una cota superior sobre el tamaño de la n-tupla requerida de revisión en la existencia de una medición. Una cota superior independiente de la cardinalidad de A muestra que las estructuras para las que existe una medición no se convierten esencialmente más complicadas en tanto que la cardinalidad del conjunto A se incrementa. Si eliminamos de los axiomas aserciones existenciales entonces, como Dana Scott y yo mostramos hace algunos años (1958), para enunciados abiertos o enunciados universales, es decir, enunciados que usan sólo cuantificadores universales al frente, no es posible dar una lista finita de condiciones necesarias y suficientes que cualquier estructura finita debe satisfacer para ser una estructura de diferencia. En un artículo subsecuente, Scott (1964) dio condiciones necesarias y suficientes en términos de un esquema infinito que se incrementa en su complejidad en tanto que el número de objetos en A se incrementa y que en términos de enunciados abiertos elementales es equivalente a un infinito contable de tales enunciados. Lo que es especialmente importante acerca de esta condición es que requiere comprobación sobre n-tuples arbitrariamente largos de los números de objetos cuando el conjunto A se incrementa.

Para quienes estén interesados en escalas multidimensionales, tiene caso recordar que los resultados que Scott y yo hemos obtenido, han sido generalizados recientemente a n-dimensiones por Titiev (1969). El mostró que si intentamos representar juicios de similitud en espacios n-dimensionales con una métrica euclideana, entonces de nuevo no pueden darse condiciones necesarias y suficientes en términos de una lista finita de enunciados abiertos. Titiev también estableció un resultado similar para mediciones aditivas conjuntas en n-dimensiones.

Tal vez las mejores condiciones necesarias y suficientes que se encuentran todavía en un único artículo están en Scott (1964), pero su examen de otros casos, incluyendo mediciones de probabilidades subjetivas o mediciones de masa o distancia, muestra que una lista finita simple de condiciones necesarias y suficientes no puede encontrarse en cualquiera de los casos estándar. De hecho, es un problema interesante preguntar para qué casos, otros que el del orden simple, pueden encontrarse condiciones necesarias y suficientes para dominios finitos. En la siguiente sección se da un ejemplo cercanamente relacionado, pero debo confesar que no puedo pensar en ningún otro ejemplo de genuino interés.

Una dirección para investigaciones posteriores en la literatura consiste en apretar los requisitos sobre las condiciones necesarias y suficientes. Por ejemplo, para requerir que la medición que se asigna a una estructura finita sea única salvo algún grupo clásico de transformaciones como el grupo de transformaciones lineales o de similitud, podríamos aumentar los requisitos para las condiciones necesarias y suficientes y de esta manera encontrar soluciones simples en algunos casos. Sin embargo, no puedo, en este momento reportar ningún resultado positivo no trivial en esta dirección.

Teoría algebraica del error

El lugar más fácil para comenzar a ver el problema del error es un orden simple. Podemos preguntar cómo puede introducirse el problema del error sin ir a consideraciones probabilísticas. En otras palabras, ¿qué podemos decir a un nivel algebraico acerca de la teoría del error combinada con la teoría del orden? Es grato reportar que en este caso una solución simple está a la mano. Sorprendentemente, la idea no fue introducida de una manera explícita mucho antes en la literatura. El concepto de semiorden, que combina las ideas de error y orden, fue introducido por vez primera por Luce (1956), y los axiomas fueron simplificados más tarde por Scott y Suppes (1958). Se establecen axiomas para estructuras binarias $\chi = \langle A, P \rangle$, donde la interpretación propuesta de la relación P es la de precedencia estricta o preferencia estricta. Los axiomas son precisamente los siguientes tres, para toda x, y, u y v en A:

Axioma 1. No xPx.
Axioma 2. Si xPy y uPv entonces o xPv o uPy.
Axioma 3. Si xPy y yPu entonces o xPw o wPu.

La idea intuitiva de los axiomas en la representación es que los objetos que no están en la relación de precedencia estricta caen más allá de un umbral de discriminación. El teorema que puede demostrarse es que en el caso finito la relación P puede representarse como sigue:

$$xPy \text{ si y sólo si } f(x) > f(y) + \varepsilon, \text{ con } \varepsilon > 0. \tag{2}$$

En referencia a nuestra discusión anterior, es también grato reportar

que esos tres axiomas son necesarios y suficientes para el tipo de representación recién mostrada cuando el conjunto A es finito.

Una parte natural de la teoría algebraica del error consiste en negligir consideraciones de orden y considerar sólo la relación entre objetos no discriminables, es decir, objetos que están dentro del umbral de discriminación. Sea I una relación de indiscriminabilidad tal. Es patente que la relación I debe ser reflexiva y simétrica; los dos siguientes axiomas se satisfacen para cualesquiera dos objetos x e y en el conjunto básico de la estructura:

Axioma 1. xIx.
Axioma 2. Si xIy entonces yIx.

También es claro cuál es nuestra representación propuesta para el conjunto I.

Queremos encontrar una representación del siguiente tipo:

$$xIy \text{ si y sólo si } |f(x) - f(y)| \leqq \varepsilon, \text{ con } \varepsilon > 0. \tag{3}$$

Uno podría esperar que se encuentren condiciones necesarias y suficientes similarmente simples para la relación I como en el caso de la relación de precedencia estricta dada antes. Una vez más, sin embargo, la respuesta es negativa. Esto fue recientemente demostrado por Fred Roberts en su disertación de Stanford. El resultado es similar al anteriormente obtenido para estructuras de diferencia. Ningún conjunto finito de enunciados abiertos elementales puede caracterizar las condiciones necesarias y suficientes para obtener la representación requerida por (3). En el caso de la relación de indiscriminabilidad el corazón de la demostración yace en el hecho de que los ciclos de indiscriminabilidad de tamaño siempre mayor deben excluirse. Sea que un segmento de línea de conexión indique que los objetos son indiscriminables. Debemos excluir ciclos de tamaño arbitrario como se muestra en la Figura 1.

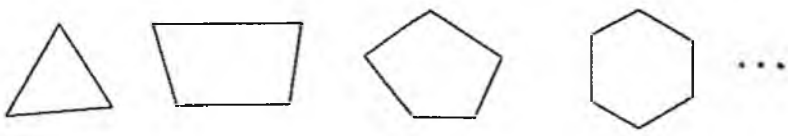


FIGURA 1. *Ciclos de indiscriminabilidad.*

Excluir tales ciclos significa que al examinar datos específicos de indiscriminabilidad, no podemos comprobar la existencia de una función de representación sólo viendo, como nos gustaría, a pares o triples o cuadruples de objetos. Debemos revisar n-tuples de tamaño arbitrario para asegurar que existe una representación.

De nuevo, como los resultados de Scott (1964) para las estructuras de diferencia, Roberts (1968) ofrece un conjunto infinito de condiciones necesarias y suficientes para la representatibilidad de relaciones de indiscriminabilidad sobre conjuntos finitos. El esquema de axioma más importante es el que excluye la lista contable de ciclos del tipo descrito antes.

La situación axiomática con respecto a la teoría algebraica del error para estructuras de medición más complicadas no es todavía enteramente satisfactoria. Algunas condiciones necesarias y suficientes relativamente complicadas para la medición de la probabilidad subjetiva con un semiorden reemplazando el orden simple ordinario fueron dadas por Zoltan Domotor (1969) en su disertación de Stanford. Trabajos no axiomáticos anteriores sobre semiórdenes en medición extensiva pueden encontrarse en Krantz (1967).

Esas dificultades de encontrar una formulación trabajable arrojan dudas, me parece, sobre la practicabilidad de aplicar teorías algebraicas del error a datos reales. De hecho, no conozco ningún lugar en la literatura experimental donde las ideas recién descritas se usen de una manera sistemática. Los métodos probabilísticos o algún otro enfoque, por ejemplo, la clase de cosas que uno puede obtener del uso de las técnicas de programación lineal, han sido usados en todos los estudios que conozco. Me parece que un problema importante para la teoría de la medición consiste en determinar a un nivel más profundo si hay posibilidades serias de aplicación efectiva de la teoría algebraica del error a datos experimentales reales.

Teoría no algebraica del error

Constantemente aparte de las teorías fundamentales del error está una teoría aplicada muy substancial acerca del análisis del error en medición. No es posible aquí, en el corto espacio que resta, revisar esta literatura, pero ciertas partes de ella son tan cercanas a los problemas de medición en las ciencias sociales que sería negligente no mencionar sus conexiones a los tópicos en los que ya he hecho

hincapié. De la familia normal de los métodos generales, ninguno es más común que el de regresión, y las consideraciones breves que haré aquí pueden restringirse a los modelos de regresión sin ninguna pérdida. La primera cuestión a notar acerca de tales modelos es la ausencia de una base axiomática del tema del fenómeno a ser medido. Como el Profesor Williams correctamente enfatizó en su ponencia en el Seminario, el uso apropiado de los modelos de regresión está en la exploración de un área y en la identificación de variables relevantes. El marco conceptual de regresión en sí mismo no provee de un escenario natural en el cual investigar las propiedades de las estructuras genéricas del dominio. Como él también enfatizó, queremos pasar de los modelos de regresión a modelos de estructuras que postulan más acerca de las relaciones mutuas que valen en el dominio dado. El uso extendido de modelos de regresión en cada área de las ciencias sociales atestigua dos cosas: primero, de la superficialidad de mucho de nuestro teorizar, y segundo, de la absoluta necesidad de tomar cuenta de los errores en las relaciones que estudiamos. Es típico el caso en un análisis de regresión que el término del error no refiera realmente a los errores en la medición de las variables sino más bien a la inhabilidad de las interrelaciones entre las variables independientes de dar cuenta de las variaciones en la variable dependiente.

Aún otra manera de establecer la cuestión es esta. Podemos esperar encontrar modelos de estructura subyacentes que justificarán, al menos como una primera aproximaxión, los modelos de regresión que son tan fácilmente aplicables al estudio del fenómeno en casi todo dominio. Quisiera acentuar lo sutil de la relación que puede existir entre modelos de estructura y modelos de regresión mencionando muy brevemente algo de mi propio trabajo. Recientemente empezamos a aplicar modelos probabilísticos de autómatas en el análisis de la realización de tareas aritméticas de niños chicos. Esos autómatas probabilísticos constituyen modelos estructurales, creo, en casi cualquier sentido del término. Intentamos dar una explicación progresivamente detallada de los pasos que los estudiantes ejecutan aplicando un algoritmo para encontrar una respuesta numérica. Los aspectos probabilísticos del autómata son ajustados a los datos para adecuar los errores hechos por los estudiantes. Desde luego, si los estudiantes no cometen errores en ningún lugar, el estudio experimental sería trivializado, y podríamos representar su comportamiento por un autómata determinístico simple finito. Bajo un conjunto natural de suposiciones acerca de las fuentes de error, podemos pasar del modelo del

autómata a un análisis real de los datos en términos de un modelo de regresión simple tomando el logaritmo de la probabilidad como una respuesta correcta.

En una situación como ésta, el modelo de regresión no se usa ya simplemente para explorar variables relevantes; es una importante herramienta estadística para comprobar un modelo estructural subyacente más bien elaborado. La teoría del error construida sobre el modelo de regresión es entonces directamente útil en la adecuación del modelo del autómata a los datos experimentales.

Me doy cuenta que he dicho sólo las cosas más superficiales acerca de la teoría no algebraica del error, pero es necesario llevar la discusión a un fin en este momento.

Hay una cosa final que me gustaría decir como expresión de mis sentimientos acerca de la medición. En tanto que exploremos una nueva área de la ciencia, o desarrollemos nuevas intuiciones en un área familiar, o mejoremos nuestra técnica de medición, debemos usar aquellas técnicas para identificar variables importantes y movernos de la identificación a suposiciones que van más allá de la teoría de la medición misma. Otra manera de poner el asunto es esta. Pienso que todos nosotros que estemos interesados en la teoría de la medición debemos mantener un ojo abierto en todo momento al marco conceptual más general dentro del que trabajamos y tratar de usar los resultados de la medición para profundizar nuestra comprensión de ese marco conceptual, e incluso en ocasión, reconstruirlo totalmente. Especialmente en las ciencias sociales, un uso correcto de la teoría de la medición puede contribuir tanto a cuestiones de la teoría general de la construcción como el mejoramiento de nuestros métodos de investigación y análisis de datos.

Capítulo 11

UN CONJUNTO DE AXIOMAS INDEPENDIENTES PARA CANTIDADES EXTENSIVAS*

1. Introducción[1]

El punto de vista moderno sobre cantidades se remonta, al menos, hasta la *Universal Arithmetick* de Newton. Newton afirma que la relación entre cualesquiera dos cantidades de la misma clase puede expresarse por un número real positivo[2]. En 1901, O. Hölder dio un conjunto de «Axiome der Quantitaet», los cuales son suficientes para establecer un isomorfismo entre cualquier realización de sus axiomas y el semigrupo aditivo de todos los números reales positivos. Es indicativo del interés general en el tema de las cantidades en abstracto, por parte de los matemáticos de ese período, el trabajo relacionado de Hilbert, Varonese y otros. Durante los últimos treinta años, desde otra dirección, algunos filósofos de la ciencia se han interesado en el análisis lógico de procedimientos empíricos de medición[3]. Los intere-

---

* Publicado originalmente en *Portugaliae Mathematica* 10, 1951, pp. 163-172. Versión castellana por Arturo Lemus Martínez.

[1] Estoy agradecido con J. C. C. McKinsey por un buen número de útiles sugerencias relacionadas con este escrito.

[2] Newton (1769), p. 2.

[3] El trabajo de Norman R. Campbell en (1920) y (1928) han sido enfocados en esta dirección.

ses de estos dos grupos coinciden en cuanto los filósofos han estado ocupados en establecer las condiciones formales que deben ser satisfechas por operaciones empíricas que miden alguna característica de objetos físicos (u otras entidades). Los filósofos han dividido las cantidades (esto es, entidades u objetos considerados en relación a una característica dada, tal como la masa, la longitud o la dureza) en dos clases. Las cantidades intensivas son aquellas que pueden meramente ser dispuestas en un orden serial; las cantidades extensivas son aquellas para las cuales puede también especificarse una operación «natural» de adición o combinación. Otra forma, más exacta, de hacer una distinción de este orden es diciendo que las cantidades intensivas son cantidades a las cuales les pueden ser asignados números únicamente hasta una transformación monótona, y las cantidades extensivas son cantidades a las cuales les pueden ser asignados números únicamente hasta una transformación de similitud (esto es, multiplicación por una constante positiva)[4]. Puede decirse que esta última condición es el criterio de adecuación formal para un sistema de cantidades extensivas.

El sistema de Hölder satisface este criterio de adecuación para cantidades extensivas y su sistema ha sido de hecho usado por algunos filósofos (ver, por ejemplo, Nagel [1931]) en estudios metodológicos de la medición. Pero desde el punto de vista metodológico, hay al menos dos serios defectos en el sistema de Hölder. El primero consiste en que él no axiomatiza la relación designada por «=», sino en su lugar la trata como la relación lógica de identidad. Sin embargo, comúnmente se admite que dos segmentos de línea distintos pueden tener la misma longitud numérica o dos objetos distintos la misma masa; y consecuentemente, «=» debería designar una relación de equivalencia que no es la de identidad lógica[5]. El segundo defecto del sistema de Hölder es que es demasiado fuerte para una caracterización general de cantidades extensivas. Su sistema es categorial en el sentido

---

[4] Se podrá observar que esta clasificación tradicional no es muy satisfactoria, ya que también hay cantidades a las cuales se les pueden asignar números univocamente hasta una variedad de otros grupos de transformación. Sin embargo, este punto es aquí irrelevante, puesto que estamos interesados solamente en cantidades extensivas en el sentido recién definido y no nos concierne el problema de precisamente cuántos géneros formalmente distintos es útil distinguir.

[5] Esta crítica parecería también aplicarse a los axiomas para la medición de la utilidad dados por J. von Neumann y O. Morgenstern (1947): «=» debe designar la relación de indiferencia más bien que la de identidad.

de que cualesquiera dos realizaciones de él son isomórficas y, además, isomórficas al semigrupo aditivo de todos los números reales positivos. Pero estos requisitos son ciertamente demasiado exigentes, porque es intuitivamente obvio que un conjunto de cantidades extensivas no necesita tener ni siquiera la propiedad de densidad de los números racionales. Las masas de los objetos en un conjunto dado, por ejemplo, podría determinarse con seguridad, aun cuando relativamente a alguna unidad, la masa de cada objeto en el conjunto fuera un entero positivo.

El propósito del presente trabajo es presentar un sistema de axiomas formalmente adecuado para cantidades extensivas, en el cual estos dos defectos son eliminados. Además se dan las demostraciones de independencia de los axiomas y de las primitivas del sistema.

2. Axiomas

Consideremos un sistema que consiste en un conjunto no vacío K de elementos arbitrarios $x, y, z, \ldots$, una relación binaria Q definida sobre K y una función binaria $*$ definida sobre K. Tal sistema puede ser considerado como el triple ordenado $\langle K, Q, * \rangle$. Las variables «m», «n», etc., toman como valores los números naturales; la notación «nx» es definida en la forma recursiva usual: $1x = x$ y $nx = (n - 1)\, x * x$.

Definición. Un sistema $\langle K, Q, * \rangle$, es un *sistema de cantidades extensivas* si satisface los siguientes siete axiomas:

AI Si x, y, z están en K, y si xQy e yQz entonces xQz;
AII Si x e y están en K entonces $x * y$ está en K;
AIII Si x, y, z están en K entonces $(x * y) * zQx * (y * z)$;
AIV Si x, y, z están en K y xQy entonces $x * zQz * y$;
AV Si x e y están en K y no es el caso que xQy entonces hay una z en K tal que $xQy * z$ e $y * zQx$;
AVI Si x e y están en K entonces no es el caso que $x * yQx$;
AVII Si x e y están en K y xQy entonces hay un número n tal que $yQnx$.

Si $*$ se interpreta como $+$ y Q como $\leqq$, se puede fácilmente ver que estos axiomas se satisfacen por cualquier semigrupo aditivo de

números positivos cerrado bajo la substracción de números menores a mayores. La adecuación formal de estos axiomas, en el sentido definido en la sección 1, se establece en la sección 5; que son mutuamente independientes es establecido en la sección 6.

3. Teoremas elementales

Por brevedad, en la enunciación y la demostración de los teoremas que se siguen de los siete axiomas recién dados se omite la enunciación de la condición de que los elementos esten en K. Todas las demostraciones son de carácter elemental y por lo tanto están considerablemente abreviadas.

Teorema 1. xQx.

Demostración. Supongamos que no es el caso que xQx. Entonces por AV, hay un z tal que $x * zQx$, pero esto contradice el AVI.

Teorema 2. $x * yQy * x$.

Demostración. Use el teorema 1 y AIV.

Teorema 3. Si xQy y uQv entonces $x * uQy * v$.

Demostración. $x * uQu * y$ y $u * yQy * v$ por AIV y la hipótesis. Luego úsese el AI.

Teorema 4. $x * (y * z)Q(x * y) * z$.

Demostración. Usando el teorema 2 obtenemos $x * (y * z)Q(y * z) * x$.

Luego utilizando el teorema 3, el teorema 2 y los axiomas AI y AIII, obtenemos $x * (y * z)Qz * (y * x)$. Usando el teorema 2, el teorema 3 y el AI obtenemos el teorema.

Teorema 5. xQy o yQx.

Demostración. Supongamos que ni xQy ni yQx. Entonces $y * z_1Qx$ y $x * z_2Qy$ por AV. De esto, por los teoremas 1 y 3, obtenemos $(y * z_1) * z_2Qx * z_2$, luego por el AI $(y * z_1) * z_2Qy$. De esto usando el teorema 4 y AI, obtenemos $y * (z_1 * z_2)Qy$, que contradice AVI.

Teorema 6. Si $x * uQy * u$ entonces xQy.

Demostración. Supongamos que no es el caso que xQy. Entonces por AV, hay un z tal que $y * zQx$. Usando el teorema 3, la hipótesis, el teorema 4 y el AI, obtenemos $y * (z * u)Qy * u$. De aquí, por el

teorema 3 y los axioma AIII y AI, obtenemos $(y * u) * zQy * u$, que contradice AVI.

Teorema 7. Si $y * zQu$ y xQy entonces $x * zQu$.

Demostración. $x * zQy * z$, por el teorema 1, la hipótesis y el teorema 3. Luego, $x * zQu$ por la hipótesis y AI.

Teorema 8. Si $uQx * z$ y xQy entonces $uQy * z$.

Demostración. Similar a la del teorema 7.

Teorema 9. $mx * nxQ(m + n)x$.

Demostración. Usamos inducción matemática sobre n. Para $n = 1$, la demostración es inmediata. Para $n + 1$, comenzamos con $mx * (n + 1)xQmx * (nx * x)$. Usando principalmente el teorema 1, y los teoremas 3 y 6 y la hipótesis de que el teorema vale para n, obtenemos $mx * (n + 1)xQ(m + n + 1)x$.

Teorema 10. $(m + n)xQmx * nx$.

Demostración. Similar a la del teorema 9.

Teorema 11. $n(mx)Q(nm)x$.

Demostración. Usamos inducción matemática sobre n. Para $n = 1$, la demostración es inmediata. Para $n + 1$, comenzamos con $(n + 1)(mx)Qn(mx) * mx$. Usando principalmente el teorema 10, la hipótesis de que el teorema vale para n y el teorema 9, obtenemos $(n + 1)(mx)Q((n + 1)m)x$.

Teorema 12. $(nm)xQn(mx)$.

Demostración. Similar a la del teorema 11.

Teorema 13. $n(x * y)Qnx * ny$.

Demostración. Nuevamente utilizamos inducción matemática sobre n. La demostración es obvia para $n = 1$. Para $n + 1$, comenzamos con $(n + 1)(x * y)Qn(x * y) * (x * y)$, que se sigue del teorema 10. Usando la hipótesis de que el teorema vale para n, los teoremas 1 y 3 y los axiomas AIII y AI, obtenemos $(n + 1)(x * y)Qnx * (ny * (x * y))$. Partiendo ahora del teorema 6, usando luego el teorema 2, el teorema 1, el teorema 3, el AIII, el AI, el teorema 1 y el teorema 3 nuevamente, obtenemos $nx * (ny * (x * y))Qnx * (x * (ny * y))$. Combinando esto con el resultado anterior, usando el AI, el teorema 4 y la definición de «nx», obtenemos el teorema.

Teorema 14. $nx * nyQn(x * y)$.

Demostración. Similar a la del teorema 13.

Teorema 15. Si xQy entonces $nxQny$.

Demostración. Usamos inducción matemática sobre n. Para $n=1$ la demostración es inmediata. De la hipótesis de que el teorema vale para n obtenemos inmediatamente $nxQny$. Y haciendo uso después del teorema 3 y de xQy, obtenemos $nx * xQny * y$, de donde obtenemos inmediatamente el teorema.

Teorema 16. Si $nxQny$ entonces xQy.

Demostración. Supongamos que no es el caso que xQy. Entonces por el AV, hay un z tal que $y * zQx$; y de aquí por el teorema 15, el teorema 14 y AI obtenemos $ny * nzQnx$. Usando la hipótesis y el AI, esto arroja $ny * nzQny$, que contradice al AVI.

Teorema 17. Si $m \leqq n$ entonces $mxQnx$.

Demostración. Si $m = n$ entonces el teorema se sigue inmediatamente por el teorema 1. El otro caso es cuando $m < n$. Así, $n = m + k$. Supongamos ahora que no es el caso que $mxQnx$. Entonces por el teorema 5, $nxQmx$, es decir $(m + k)xQmx$. De esto por el teorema 9 y AI, obtenemos $mx * kxQmx$, que contradice a AVI.

Teorema 18. Hay un número n tal que $xQny$.

Demostración. Por el teorema 5, xQy o yQx. Caso 1, xQy. Sea $n = 1$. Caso 2, yQx. El teorema se sigue inmediatamente del AVII.

4. Sistema de magnitudes

Si las magnitudes son definidas como ciertas clases de equivalencia de cantidades, se puede desarrollar un sistema de cantidades extensivas, el cual es útil para demostrar la adecuación formal de nuestros axiomas para cantidades extensivas. Concebido de esta manera parecería haber un lugar propio para las magnitudes así como para las cantidades, y no sería necesario un debate interminable sobre el mérito relativo de cada una[6].

La relación definida por el producto lógico de Q y su conversa es obviamente reflexiva, simétrica y transitiva, esto es, es una relación de equivalencia, que nosotros podemos designar por «C»:

$$xCy = \text{df } (xQy \text{ y } yQz).$$

[6] Para algunos aspectos de este debate, ver Russell (1903), capítulos 19 y 20 y Nagel (1931).

Así, C define una partición de K, es decir, un conjunto de subconjuntos no vacíos de K, disjuntos por pares, y cuya unión es igual a K. Designamos a la clase de equivalencia C de la que x es un miembro (es decir, el cociente x/C) por «$[x]$», y a la partición de K por «K/C». La relación C tiene la propiedad de substitución relativamente a Q y $*$, o sea, (i) si xCy y yQz entonces xQz y si xCy y zQy entonces zQx, y (ii) si xCy y uCv entonces $x * uCy * v$. (i) es trivial y (ii) se sigue inmediatamente del teorema 3 y la definición de «C». Así podemos definir una relación $\leqq$ y una operación $+$ en K/C:

(i) $[x] \leqq [y]$ si y sólo si xQy;

(ii) $[x] + [y]$ es la clase de equivalencia C en K/C que consiste en los elementos de K que están en la relación C con el elemento $x * y$. También, «$n[x]$» está definida recursivamente, exactamente como «nx» fue definida previamente: $1[x] = [x]$ $n[x] = (n - 1)[x] + [x]$. En resumen, donde $\chi = \langle K, Q, * \rangle$ es un sistema de cantidades extensivas, $\chi/C = \langle K/C, \leqq, + \rangle$ es un sistema de clases de equivalencia (o cocientes) de χ bajo la relación C, y llamaremos a χ/C un sistema de magnitudes extensivas.

Sobre la base de los axiomas y los teoremas ya dados es fácil demostrar los siguientes teoremas para magnitudes extensivas, los cuales enumeraremos comenzando con el 21. Los teoremas están ordenados para exhibir claramente la estructura algebraica de un sistema de magnitudes extensivas. Por brevedad, escribiremos $[x] < [y]$ en lugar de $[y] \leqq [x]$.

T. 21. Si $[x]$ y $[y]$ están en K/C entonces $[x] + [y]$ está en K/C.

T. 22. Si $[x]$, $[y]$ y $[z]$ están en K/C entonces $([x] + [y]) + [z] = [x] + ([y] + [z])$.

T. 23. Si $[x]$ y $[y]$ están en K/C entonces $[x] + [y] = [y] + [x]$.

T. 24. Si $[x]$, $[y]$ y $[z]$ están en K/C y $[x] + [z] = [y] + [z]$ entonces $[x] = [y]$.

T. 25. Si $[x]$ y $[y]$ están en K/C y $[x] \leqq [y]$ y $[y] \leqq [x]$ entonces $[x] = [y]$.

T. 26. Si $[x]$, $[y]$ y $[z]$ están en K/C y $[x] \leqq [y]$ y $[y] \leqq [z]$ entonces $[x] \leqq [z]$.

T. 27. Si $[x]$ y $[y]$ están en K/C entonces o $[x] \leqq [y]$ o $[y] \leqq [x]$.

T. 28. Si $[x]$ y $[y]$ están en K/C y $[y] < [x]$ entonces hay un $[z]$ en K/C tal que $[x] = [y] + [z]$.

T. 29. Si $[x]$ y $[y]$ están en K/C entonces $[x] < [x] + [y]$.

T. 30. Si $[x]$ y $[y]$ están en K/C y $[x] \leqq [y]$ entonces hay un número n tal que $[y] \leqq n[x]$.

Es patente que pueden demostrarse fácilmente los análogos obvios de todos los teoremas en la Sección III. De los teoremas establecidos aquí, vemos que la estructura algebraica de un sistema de magnitudes es la de un semigrupo abeliano arquimediano, de orden simple, que no tiene un elemento cero y que es cerrado bajo la substracción de elementos «más pequeños» a elementos «más grandes».

5. Adecuación de los axiomas

La adecuación formal de nuestros axiomas está demostrada por el uso esencial de los teoremas sobre magnitudes extensivas que se hace. La razón de esto es que un sistema de cantidades extensivas es en general meramente homomórfico a un semigrupo aditivo de números reales positivos, lo que es de esperarse, ya que en la medición de objetos relativa a una característica, el mismo número es frecuentemente asignado a objetos distintos. En particular, un número dado es asignado a una clase de equivalencia C de objetos, que conduce al siguiente metateorema.

METATEOREMA A. Si $\chi = \langle K, Q, * \rangle$ es un sistema de cantidades extensivas entonces el sistema de magnitudes extensivas χ/C es isomórfico a un semigrupo aditivo de números reales positivos, cerrado bajo substracción de números menores a números mayores[7].

Demostración. La demostración de este metateorema sigue las líneas estándar dadas, por ejemplo, por Hölder (1901) o Birkhoff (1948), p. 226. (La demostración de Birkhoff para grupos arquimedianos de orden simple requiere modificarse sólo ligeramente. Birkhoff también da referencias detalladas de la literatura.) Por lo tanto será suficiente describir brevemente la construcción de una función f con las propiedades deseadas. Definimos el conjunto $S_{[x][e]}$ donde $[x]$ y $[e]$ están en K/C, como el conjunto de todas las fracciones racionales m/n tal que $n[x] \leqq m[e]$. Es fácil demostrar que $S_{[x][e]}$ tiene una máxima

[7] Ahora llamaría al metateorema A el «teorema de representación» para cantidades extensivas y al metateorema B el «teorema de unicidad». *(Nota agregada por el autor para una reedición en 1969.)*

cota inferior, que definimos como el número asignado a $[x]$, esto es, la función f es definida como sigue:

$$f_{[e]}([x]) \text{ es la máxima cota inferior de } S_{[x][e]}.$$

Ya que puede mostrarse que $f_{[e]}([e]) = 1$, la elección de $[e]$ corresponde a la elección de una unidad. Y, usando los teoremas de la sección IV, se puede mostrar de una manera directa que $f_{[e]}([x])$ tiene las propiedades deseadas: Si $[x] \leqq [y]$ entonces $f_{[e]}([x]) \leqq f_{[e]}([y])$; $f_{[e]}([x] + [y]) = f_{[e]}([x]) + f_{[e]}([y])$ y si $[x] \neq [y]$ entonces $f_{[e]}([x]) \neq f_{[e]}([y])$[8].

El siguiente metateorema establece la propiedad de unidad deseada de nuestros axiomas; es equivalente a decir que en la medición de cantidades extensivas solamente la elección de una unidad es arbitraria.

METATEOREMA B. Si $\chi = \langle K, Q, {}^{\circ} \rangle$ es un sistema de cantidades extensivas, entonces cualesquiera dos semigrupos aditivos de números reales positivos que son isomórficos a χ/C, están relacionados por una transformación de similitud.

Demostración. Considere cualquier semigrupo aditivo de números reales positivos isomórfico a χ/C bajo la función g. Entonces será suficiente mostrar que existe una constante positiva c tal que para toda $[x]$ en K/C, $g([x]) = cf_{[e]}([x])$, donde $f_{[e]}$ es la función definida arriba. Sea $g([e]) = [c]$. Entonces, supongamos que existe una $[x]$ en K/C tal que $g([x]) < cf_{[e]}([x])$. Sobre esta suposición podemos encontrar un m/n tal que

$$g([x])/c < m/n < f_{[e]}([x]). \tag{1}$$

Es claro de la definición de $f_{[e]}$ que entonces $m[e] < n[x]$, y por lo tanto, sobre la hipótesis para g, $mg([e]) < ng([x])$, esto es, $m/n < g([x])/c$, pero esto contradice (1). Similarmente sobre la suposición de que existe un $[x]$ en K/C tal que $cf_{[e]}([x]) < g([x])$, conseguimos también una contradicción. Q.E.D.

Se puede observar que un sistema de magnitudes extensivas χ/C es

[8] Otro método de demostración de este metateorema consiste en mostrar que χ/C es univocamente incrustable en un grupo arquimedeano de orden simple. Y es bien sabido (ver Birkhoff [1948]) que cualquier grupo tal es isomórfico a un subgrupo del grupo aditivo de todos los números reales.

también isomórfico a semigrupos (no aditivos) en el dominio de números que no están relacionados por una transformación de similitud. La realización final de nuestros axiomas dada en la sección 7 abajo es un ejemplo de este tipo.

6. Independencia de axiomas

Los siguientes siete ejemplos establecen la independencia mutua de nuestros axiomas para cantidades extensivas. El primer ejemplo proporciona una interpretación de K, Q y $*$ que es satisfecha por todos excepto el primer axioma, etc. Puesto que todos los ejemplos son de carácter elemental, se omiten todas las demostraciones.

I. Sea K el conjunto de todos los enteros positivos; sea xQy si y sólo si $x \leqq y + 1$; y se define $x * y$ como $x + y + 2$.

II. Sea K simplemente el conjunto que consiste del número uno; sea xQy si y sólo si $x \leqq y$; y $*$ se define como la adición ordinaria.

III. Sea K el conjunto de todos los números racionales positivos; sea xQy si y sólo si $x \leqq y$; y se define $x * y$ como $\text{Max}(x, y) + \frac{1}{2}\,\text{Min}(x, y)$.

IV. Sea K el conjunto de todos los números racionales positivos; sea xQy si y sólo si $x \leqq y$; y $x * y$ se define como $x + 10y$.

V. Sea K el conjunto de todos los enteros positivos con la excepción del número uno; sea xQy si y sólo si $x \leqq y$; y $*$ se define como la adición ordinaria.

VI. Sea K el conjunto que consiste del número uno; sea xQy si y sólo si $x \leqq y$; y $*$ se define como la multiplicación ordinaria.

VII. Sea K el conjunto cuyos elementos son (i) todos los pares ordenados cuyos primeros miembros son enteros positivos y cuyos segundos miembros son enteros, junto con (ii) todos los pares ordenados cuyos primeros miembros es el cero y cuyos segundos miembros son enteros positivos; donde $x = \langle a, b\rangle$ y $y = \langle c, d\rangle$, sea xQy si y sólo si $a < c$, o $a = c$ y $b \leqq d$; se define $\langle a, b\rangle * \langle c, d\rangle$ como $\langle a + c, b + d\rangle$.

7. Independencia de primitivas

Usando el principio de Padoa[9], podemos establecer la independencia mutua de las tres primitivas K, Q y $*$ de nuestros axiomas para cantidades extensivas. La aplicación del principio de Padoa requiere que encontremos para cada primitiva dos realizaciones diferentes de nuestros axiomas tales que a las otras dos primitivas les sea dada la misma interpretación en ambas realizaciones.

I. Independencia de K. Para la primera realización sea K' el conjunto de enteros positivos; sea $xQ'y$ si y sólo si $x \leqq y$; y $*'$ se define como la adición ordinaria. Y para la segunda realización, sea K'' el conjunto de enteros pares positivos; $Q'' = Q'$ y $*'' = *'$.

II. Independencia de Q. Para la primera realización, sea K' el conjunto de todos los pares ordenados de enteros positivos; donde $x = \langle a, b\rangle$ y $y = \langle c, d\rangle$, sea $xQ'y$ si y sólo si $a \leqq c$; y $\langle a, b\rangle *' \langle c, d\rangle = \langle a + c, b + d\rangle$. Para la segunda realización, $K' = K''$; $*'' = *'$; donde $x = \langle a, b\rangle$ y $y = \langle c, d\rangle$, sea $xQ''y$ si y sólo si $b \leqq d$. Así tenemos, por ejemplo, $\langle 1, 2\rangle Q' \langle 2, 1\rangle$ y no $\langle 1, 2\rangle Q'' \langle 2, 1\rangle$.

III. Independencia de $*$. Para la primera realización, sea K' el conjunto de números enteros positivos; sea $xQ'y$ y si y sólo si $x \leqq y$; $*'$ se define como la adición ordinaria. Para la segunda realización, $K'' = K'$; $Q'' = Q'$; y $x *'' y = \sqrt{x^2 + y^2}$. Así tenemos, por ejemplo, $1 *' 2 = 3$ y $1 *'' 2 \neq 3$.

8. Realizaciones empíricas

Nuestro sistema de axiomas para cantidades extensivas fue diseñado para eliminar dos defectos del sistema de Hölder, que fueron mencionados en la Sección 1. En esta sección conclusiva quiero señalar, desde el punto de vista del análisis metodológico de la medición, dos de los más fundamentales defectos comunes a ambos sistemas.

Dada cualquier realización de nuestros axiomas, parece, en primer lugar, que el conjunto K debe contener un número infinito de elementos. Esto viola flagrantemente los requisitos finitistas obvios de

[9] Padoa (1901); una clara enunciación de este principio también se encuentra en McKinsey (1935).

la medición empírica. Y, parece, en segundo lugar, que la realización de Q debe ser una relación perfectamente transitiva, lo cual involucra que el instrumento de medición usado para determinar si dos objetos están en la relación Q o no, debe poseer una sensitividad perfecta. Sin embargo, la carencia de una sensitividad perfecta tal parece ser la característica más afín a todos los instrumentos de medición. Una balanza de brazos iguales, por ejemplo, sólo puede diferenciar objetos que tienen una diferencia de masa mayor que alguna cantidad finita.

La teoría axiomática estándar de cantidades debe ser modificada más profundamente para dar cuenta de esos dos problemas. Al menos desde un punto de vista metodológico, sería de interés un sistema formal modificado que reflejara más acertadamente los hechos de la medición imperfecta real.

Capítulo 12
ESTRUCTURAS FINITAS DE MEDICION DE INTERVALOS IGUALES*

1. Introducción

En este artículo considero algunos de los ejemplos no triviales más simples de estructuras de medición. Los conjuntos básicos de objetos o estímulos serán finitos en todos los casos, y la adecuación de los axiomas elementales para varias estructuras depende fuertemente de esta finitud.

Aunado a su finitud, la característica distintiva de las estructuras consideradas es que los objetos están igualmente espaciados, en un sentido apropiado, a lo largo del continuo, por así decirlo, de la propiedad que se mide. Las restricciones de finitud y espaciamiento equitativo simplifican enormemente las matemáticas de medición, pero afortunadamente no es el caso de que la simplificación esté acompañada por una total separación de aplicaciones empíricas realistas. La finitud y el espaciamiento equitativo son propiedades características de muchas escalas estándar, por ejemplo, la regla ordinaria, el conjunto de pesas convencionales empleadas en una balanza de brazos

---

* Publicado originalmente en *Theoria* 1-2: 1972. Versión castellana de Juan Bosco García Cantú.

iguales en el laboratorio o comercio, o cualquiera de los calibradores para medir presión, temperatura o volumen.

Nos ocupamos de cuatro tipos de tales estructuras, y cada una de ellas corresponde a un conjunto más general de estructuras analizadas en el amplio tratamiento de Krantz *et al* (1971). Los cuatro tipos de estructuras son para medición extensiva, de diferencia, de bisección y conjunta.

2. Medición extensiva

La distinción entre propiedades o magnitudes extensivas e intensivas es muy vieja en la historia de la ciencia y la filosofía. Las magnitudes extensivas son aquellas que pueden sumarse; e. g., masa y longitud son magnitudes o cantidades extensivas, en contraste, las magnitudes intensivas no pueden sumarse, aunque pueden medirse. Dos volúmenes de gas, e. g., con la misma temperatura no se combinan para formar un gas con el doble de temperatura. Algunos teóricos han afirmado, e. g. Campbell (1920) y (1928), que la medición fundamental de magnitudes intensivas no es posible. Sin embargo, no encuentro del todo persuasivos los argumentos negativos de Campbell y otros, y muchos ejemplos de estructuras de medición proveen una refutación concreta de las tesis de Campbell.

En esta sección desarrollo los axiomas de medición extensiva con tres interpretaciones específicas en mente. Una es para la medición de masa sobre una balanza de brazos iguales, otra es para la medición de longitud de varas rígidas y otra es para la medición de probabilidades subjetivas. Ciertamente, son posibles otras interpretaciones, pero restringiré las observaciones detalladas a estas tres.

Desde un punto de vista formal, las estructuras básicas son ternas $\langle X, F, \succeq \rangle$, donde X es un conjunto no vacío, F es una familia de subconjuntos de X y la relación $\succeq$ es una relación binaria sobre F. Usando subconjuntos de X como objetos, eliminamos la necesidad de un concepto primitivo separado de concatenación. Como una condición estructural general, se requerirá que F sea una *álgebra de conjuntos* sobre X, lo que es simplemente requerir que F sea no vacío y sea cerrado bajo la unión y la complementación de conjuntos, i.e., si A y B están en F entonces $A \cup B$ y $-A$ también están en F.

Las interpretaciones propuestas de los conceptos primitivos para los tres casos mencionados es razonablemente obvia. En el caso de la

masa, X es un conjunto de objetos físicos, y para dos subconjuntos A y B, $A \geqq B$ si y sólo si el conjunto A de objetos es juzgado por lo menos tan pesado como el conjunto B. Probablemente es útil enfatizar que hay diferentes usos de la balanza de brazos iguales que son apropiados para alcanzar un juicio de comparación. Por ejemplo, si $A = \{x, y\}$ y $B = '\{x, z\}$ no será literalmente posible poner a A sobre un platillo y simultáneamente a B sobre el otro, ya que el objeto x es miembro de ambos conjuntos, pero podemos hacer la comparación de dos maneras diferentes. Una es simplemente comparar las partes no empalmadas de los dos subconjuntos, que en el presente caso viene a ser sencillamente la comparación de $'\{y\}$ y $\{z\}$. Un procedimiento empírico más bien diferente, que incluso elimina la necesidad de que la balanza sea de brazos iguales, consiste en primero balancear A con arena en el otro platillo (o posiblemente agua; pero en cualquier caso, arena o agua en pequeños recipientes), y luego comparar B con la cantidad fija de arena. Dado los significados típicos de las operaciones conjuntistas de intersección, unión y complementación, no se requiere ninguna interpretación adicional de estas operaciones, incluso de la unión de conjuntos que sirve como operación de concatenación.

En el caso de las varas rígidas, el conjunto X es simplemente la colección de varas, y $A \geqq B$ si y sólo si el conjunto A de varas, cuando yacen punta a punta en línea recta, se juzga más largo que el conjunto B de varas puesto de la misma manera. Fácilmente pueden suplementarse las variaciones de exactamente cómo ha de hacerse esta comparación cualitativa de longitud.

En el caso de probabilidades subjetivas, el conjunto X es el conjunto de posibles resultados del experimento o situación empírica en consideración. Los subconjuntos de X en F son justamente eventos en el sentido ordinario de los conceptos de probabilidad y $A \geqq B$ si y sólo si A se juzga por lo menos tan probable como B.

Los axiomas para la medición extensiva, sujetos a las dos restricciones de finitud y espaciamiento equitativo, están dados en la siguiente definición. En la definición y subsiguientemente usamos las definiciones estándar de equivalencia $\sim$ en términos de orden débil y también de orden estricto. Las definiciones son sencillamente estas:

$A \sim B$ si y sólo si $A \geqq B$ y $B \geqq A$; $A > B$ si y sólo si $A \geqq B$ y no $B \geqq A$.

Definición 1. Una estructura $\chi = \langle X, F, \geqq \rangle$ es una *estructura extensiva finita, igualmente espaciada* si y sólo si X es un conjunto

finito, F es una álgebra de conjuntos sobre X y se satisfacen los siguientes axiomas para cada A, B y C en F:

1. la relación $\succeq$ es un ordenamiento débil de F;
2. si $A \cap C = \phi$ y $B \cap C = \phi$ entonces $A \succeq B$ si y sólo si $A \cup C \succeq B \cup C$;
3. $A \succeq \phi$;
4. no $\phi \succeq X$;
5. si $A \succeq B$ entonces hay un C en F tal que $A \sim B \cup C$.

Desde el punto de vista de las ideas estándar sobre la medición de masa o longitud, sería natural reforzar al Axioma 3 para aseverar que si $A \neq \phi$, entonces $A > \phi$, pero ya que no se requiere para el teorema de representación y es excesivamente restrictivo en el caso de las probabilidades subjetivas, el axioma más débil parece más apropiado.

Al establecer el teorema de representación y el de unicidad, usamos la noción de medida aditiva μ de F a los números reales; i.e., una función μ tal que para cualquier A y B en F:

(i) $\mu(\phi) = 0$;
(ii) $\mu(A) \geq 0$;
(iii) si $A \cap B = \phi$ entonces $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Teorema 1. Sea $\chi = \langle X, F, \succeq \rangle$ una estructura extensiva finita igualmente espaciada. Entonces existe una medida aditiva μ tal que para cada A y B en F

$$\mu(A) \geq \mu(B) \text{ si y sólo si } A \succeq B$$

La medida μ es única hasta una transformación de similitud positiva. Más aún, hay a lo más dos clases de equivalencia de sucesos atómicos en F; si hay dos, una de ellas contiene el evento vacío.

La demostración de este teorema y mucho de la discusión precedente se encuentra en Suppes (1969), pp. 4-8.

3. Medición de diferencia

En referencia a la distinción entre propiedades extensivas e intensivas discutidas al comienzo de la sección anterior, podría fácilmente aprovecharla para titular esta sección como *medición intensiva*, ya que es característico de una medición de diferencia el que no esté presente

ninguna operación correspondiente a la adición y que ninguna combinación significativa de objetos o estímulos se postule para las estructuras de diferencia.

En esta sección voy a tratar con estructuras cuaternarias. Como antes, el conjunto básico será no vacío y finito, pero en este caso la relación sobre el conjunto será una relación cuaternaria. Denotaré con A el conjunto básico de objetos y la relación cuaternaria con $\succeq$. La idea detrás de esta relación cuaternaria $\succeq$ es que $ab \succeq cd$ se cumple cuando y solamente cuando la diferencia subjetiva (algebraica) entre a y b es por lo menos tan grande como entre c y d. En el caso de juicios de semejanza, por ejemplo, la relación $\succeq$ se cumplirá cuando el sujeto de un experimento juzge que la semejanza entre a y b es por lo menos tan grande como la semejanza entre c y d, habiendo tomado la debida consideración del signo algebraico de la diferencia. La inclusión de la diferencia algebraica requiere de algún cuidado en la interpretación; por ejemplo, en muchos experimentos de semejanza no está ligado un signo algebraico natural a la semejanza. Los casos que satisfacen el requisito presente son juicios de utilidad o de grado o intensidad de un sonido; de hecho, cualquier tipo de juicio en el que el sujeto reconozca y acepte que los juicios yacen naturalmente a lo largo de un continuo unidimensional.

Definimos para la relación cuaternaria $\succeq$ exactamente como para una relación binaria, $>$ y $\sim$:

$$ab > cd \text{ si y sólo si } ab \succeq cd \text{ y no } cd \succeq ab,$$
$$ab \sim cd \text{ si y sólo si } ab \succeq cd \text{ y } cd \succeq ab.$$

También es conveniente tener a la mano algunas definiciones de la relación binaria de precedencia estricta o preferencia y la relación $\sim$ de indiferencia o indistinguibilidad. Estas definiciones son las siguientes:

Definición 2. $a > b$ si y sólo si $ab > aa$.
Definición 3. $a \sim b$ si y sólo si $ab \sim ba$.

A fin de expresar la parte de espaciamientos equitativos de nuestros supuestos, necesitamos una definición adicional; a saber, la definición que requiere que los objetos adyacentes en el ordenamiento estén equitativamente espaciados. Para este propósito introducimos la definición de la relación binaria J. La relación binaria J es precisamente la relación de predecesor inmediato. El axioma 4 dado abajo

relaciona J a la relación cuaternaria $\sim$. La idea intuitiva del axioma 4 es sencillamente que si a mantiene la relación J con b y c mantiene la relación J con d, entonces la diferencia entre a y b es juzgada como la misma que hay entre c y d, habiéndose tomado la debida cuenta del signo algebraico.

Definición 4. aJb si y sólo si $a > b$ y para toda c en A si $a > c$, o bien $b \sim c$ o bien $b > c$.

Regreso ahora a la definición de sistemas de diferencias equitativas finitos. Los axiomas siguen a los dados por Suppes y Zinnes (1963).

Definición 5. Una estructura cuaternaria $\zeta = \langle A, \geqq \rangle$ es una *estructura finita de diferencia igualmente espaciada* si y sólo si se satisfacen los siguientes axiomas para cada a, b, c y d en A:

1. La relación $\geqq$ es un ordenamiento débil de A.
2. Si $ab \geqq cd$ entonces $ac \geqq bd$.
3. Si $ab \geqq cd$ entonces $dc \geqq ba$.
4. Si aJb y cJd entonces $ab \sim cd$.

Teniendo en mente las interpretaciones empíricas ya mencionadas, es fácil alcanzar la interpretación intuitiva de cada axioma. El primer axioma sólo requiere que la relación cuaternario $\geqq$ sea un ordenamiento débil en términos de la diferencia cualitativa entre objetos o estímulos. El axioma 2 es el más poderoso y fundamental en muchos sentidos, expresa una propiedad necesaria simple de la interpretación propuesta de la relación $\geqq$. El axioma 3 expresa solamente un hecho algebraico necesario acerca de las diferencias. Nótese que los axiomas 1-3 son axiomas necesarios. Solamente el axioma 4 es suficiente pero no necesario; expresa el supuesto del espaciamiento equitativo ya discutido.

A partir de estos cuatro axiomas podemos probar el siguiente teorema de representación y unicidad.

Teorema 2. Sea $\zeta = \langle A, \geqq \rangle$ una estructura finita de diferencia igualmente espaciada, entonces existe una función ψ de valores reales sobre A tal que para cada a, b, c y d en A

$$\psi(a) - \psi(b) \geqq \psi(c) - \psi(d) \text{ si y sólo si } ab \geqq cd$$

Más aún, si ψ' es cualquier otra función de valores reales que tenga la misma propiedad, entonces ψ y ψ' están relacionadas por una trans-

formación lineal (positiva), i. e., existen números α y β, con $\alpha > 0$, tal que para cada a en A

$$\psi'(a) = \alpha\psi(a) + \beta$$

La prueba de este teorema se da al final del artículo. Adicionalmente, el número de propiedades elementales están organizadas en una serie de lemas elementales que conducen a la prueba del teorema.

Por una inspección casual podría haberse pensado que los primeros tres axiomas de la Definición 5 caracterizarían todas las estructuras finitas de diferencia. Sin embargo, Scott y Suppes (1958) mostraron que la teoría de todas las estructuras finitas de diferencia representables no se caracteriza por estos tres axiomas y no puede ser caracterizada por cualquier simple enlistado finito de axiomas.

Podría haberse pensado que con la adición del innecesario axioma 4, sería difícil satisfacer los axiomas, porque una colección arbitraria de estímulos u objetos no lo haría. Sin embargo, si los estímulos estudiados yacen sobre un continuo, entonces será posible seleccionar una secuencia que satisfará los axiomas, justamente como se ha hecho en el caso de seleccionar un conjunto estándar de pesos, para el empleo de una balanza de brazos iguales.

4. Medición de bisección

Las estructuras relacionales cercanamente relacionadas con las estructuras finitas de diferencia son los sistemas de bisección $\zeta = \langle A, B \rangle$, donde B es una relación ternaria sobre el conjunto finito A con la interpretación de que $B(a, b, c)$ si y sólo si b es el punto medio del intervalo entre a y c. El método de bisección tiene una larga historia en la psicofísica, pero es importante enfatizar que la satisfacción de los axiomas dados abajo no requiere ninguna suposición de alguna medición física subyacente. Todo lo que necesitamos es la idea intuitiva de un continuo cualitativo, y aun eso no se necesita para propósitos formales. Es, por supuesto, interesante, después de que la medición psicológica fundamental en términos del método de bisección se haya hecho, construir una función psicofísica que relacione mediciones físicas de la misma magnitud que las mediciones psicológicas.

Los axiomas dados abajo para el método de bisección implican un número de verificaciones que deberían ser satisfechas antes de que se

aseverara que existe una función numérica de representación, pero estas verificaciones se han ignorado frecuentemente en la literatura experimental que reporta el uso del método de bisección.

Para el conjunto más simple de axiomas y definiciones, tomamos tanto a la relación de bisección B como a la relación de $\succcurlyeq$ como primitivas, pero es fácil eliminar $\succcurlyeq$ por definición. Usamos la relación binaria J como está definida en la sección anterior (Definición 4).

Definición 6. Una estructura $\zeta = \langle A, \succcurlyeq, B \rangle$ es una *estructura de bisección* si y sólo si los siguientes axiomas son satisfechos para todo a, a', b, c, c' en A:

1. La relación $\succcurlyeq$ es un ordenamiento débil de A.
2. Si $B(abc)$ y $B(abc')$ entonces $c \sim c'$.
3. Si $B(abc)$ y $B(a'bc)$ entonces $a \sim a'$.
4. Si $B(abc)$ entonces $a > b$ y $b > c$.
5. Si aJb y bJc entonces $B(abc)$.
6. Si $B(abc)$ y $a'Ja$ y cJc' entonces $B(a'bc')$.

La interpretación intuitiva de los axiomas es relativamente transparente. El primer axioma ya es familiar. Los axiomas 2 y 3 requieren unicidad de los extremos hasta la equivalencia, lo que claramente separa a la bisección de la relación de estar entre. El axioma 4 relaciona la relación de bisección ternaria y la relación binaria de orden de una manera natural, aunque impone una restricción formal sobre la relación de bisección que frecuentemente sería omitida. La inclusión de esta propiedad de orden como parte de la relación B simplifica los axiomas.

El axioma 5 es un supuesto fuerte del espaciamiento equitativo, y el axioma 6 expresa un rasgo adicional de este espaciamiento equitativo. En vista de los axiomas dados anteriormente para las estructuras de diferencia, es un poco sorprendente que el axioma 6 pueda mostrarse independientemente del axioma 5, pero es fácil dar un modelo de los axiomas 1-5 para mostrar que este es el caso. Puesto que podemos tomar un modelo con

$$B(abc) \text{ si y sólo si } aJb \text{ y } bJc$$

y satisfacer todos los primeros cinco axiomas.

Los teoremas de representación y unicidad asumen la siguiente forma:

Teorema 3. Sea $\zeta = \langle A, \geqq, B \rangle$ una estructura (finita) de bisección. Entonces existe una función de valores reales ψ definida sobre A tal que para toda a, b y c en A:

(i) $\psi(a) \geqq \psi(b)$ si y sólo si $a \geqq b$
(ii) $2\psi(b) = \psi(a) + \psi(b)$ y $\psi(a) > \psi(b) > \psi(c)$ si y sólo si $B(abc)$.

Más aún, cualquier otra función ψ' de valores reales que satisfaga (i) y (ii) está relacionada con ψ por una transformación lineal (positiva), i. e., existen números reales α y β con $\alpha > 0$ tales que para toda a en A

$$\psi'(a) = \alpha\psi(a) + \beta$$

La demostración de este teorema se da en la sección final.

5. Medición conjunta

En muchos tipos de medios experimentales u observacionales sucede que la medición de una sola magnitud o propiedad no es factible o teóricamente interesante. Lo que sí interesa es la medición conjunta de varias propiedades simultáneamente. Consideramos en esta sección axiomas para mediciones conjuntas aditivas. La representación pretendida aquí es en la que se considera pares de objetos o estímulos. Los primeros miembros de los pares son tomados de un conjunto y, consecuentemente, representan un tipo de propiedad o magnitud, y los segundos miembros de los pares son objetos tomados de un segundo conjunto representando una magnitud o propiedad diferente. Dada la estructura de par ordenado, requerimos solamente juicios sobre si un par tiene juntamente más del atributo «conjuntado» que el segundo par o no.

Es fácil dar ejemplos de interpretaciones para las que es natural ver los pares ordenados. Supóngase que se nos pide juzgar las capacidades de los individuos para asumir una posición de liderazgo en una organización. Lo que se nos da acerca de estos individuos son puntuaciones de inteligencia sobre una escala ordinal y una medición de carisma sobre una escala ordinal. Entonces para cada individuo podemos decir cómo se compara cada escala con cualquier otro individuo. El problema está en hacer juicios entre los individuos en

términos de sus capacidades. El axioma dado abajo indica el tipo de condiciones que son suficientes para garantizar una medición conjunta, finita e igualmente espaciada, donde en este caso el espaciamiento equitativo es a lo largo de cada dimensión.

Como un segundo ejemplo, un par (a, p) puede representar un tono con intensidad a y frecuencia p, y el problema es juzgar cuál de los dos tonos suena más fuerte. Entonces el sujeto juzga $(a, p) \geqq (b, p)$ si y sólo si el tono (a, p) parece tan fuerte como (b, p). Otros ejemplos en disciplinas tan ampliamente distantes como la economía y la física se dan fácilmente y se discuten muy detalladamente en Krantz *et al* (1971), cap. 6.

Ha de enfatizarse que la representación aditiva que se busca en esta sección es un caso especial. Las generalizaciones sobre aditividad se discuten en la referencia arriba citada. Es de hacerse notar también que la restricción en esta sección para pares ordenados en vez de n-adas no es esencial.

Antes de entrar a los axiomas de medición conjunta (aditiva), necesitamos varias definiciones elementales que nos permitan definir relaciones de orden sobre componentes individuales. Sobre la base de los axiomas acerca de la relación de orden entre pares, deberemos estar capacitados para probar que estas relaciones de orden sobre los componentes son también ordenamientos débiles. En las siguientes definiciones elementales A_1 es el conjunto de componentes primeras y A_2 el conjunto de componentes segundas. Entonces, cuando se haga la referencia a un par ordenado (a, p), se entenderá que a está en A_1 y que p está en A_2.

Definición 7. $a \geqq b$ si y sólo si para todo p en A_2 $(a, p) \geqq (b, p)$. En términos de esta relación definimos $a > b$ y $a \sim b$ en la manera usual. También, se necesita una definición similar para el segundo componente.

Definición 8. $p \geqq q$ si y sólo si para toda a en A_1 $(a, p) \geqq (a, q)$. También usamos la notación ya introducida para la relación $\geqq$ sobre $A_1 \times A_2$, a saber

$$(a, p) > (b, q) \text{ si y sólo si no } (b, q) \geqq (a, p), \text{ y}$$
$$(a, p) \sim (b, q) \text{ si y sólo si } (a, p) \geqq (b, q) \text{ y } (b, q) \geqq (a, p).$$

Nuestros axiomas para la medición conjunta aditiva, en el caso finito igualmente espaciado, se implementan en la siguiente definición.

Definición 9. Una estructura $\langle A_1, A_2, \succcurlyeq \rangle$ es una *estructura finita conjunta aditiva igualmente espaciada* si y sólo si los siguientes axiomas se satisfacen para cada a y b en A_1 y cada p y q en A_2:

Axioma 1. La relación $\succcurlyeq$ es un ordenamiento débil sobre $A_1 \times A_2$.

Axioma 2. Si $(a, p) \succcurlyeq (b, p)$ entonces $(a, q) \succcurlyeq (b, q)$.

Axioma 3. Si $(a, p) \succcurlyeq (a, q)$ entonces $(b, p) \succcurlyeq (b, q)$.

Axioma 4. Si aJb y pJq entonces $(a, q) \sim (b, p)$.

El contenido intuitivo de los cuatro axiomas de la Definición 9 es patente, pero requiere de alguna discusión. El axioma 1 es, por supuesto, el requisito familiar de un ordenamiento débil. Los axiomas 2 y 3 expresan una condición de independencia de una componente de la otra. El axioma 2 dice que si el par (a, p) es al menos tan grande como el par (b, p) entonces se mantiene la misma relación cuando p es reemplazado por cualquier otro miembro q de A_2 y el axioma 3 dice la misma cosa de la otra componente. El axioma 4 es, por supuesto, suficiente pero no necesario. Establece la suposición de espaciamiento equitativo y corresponde cercanamente al axioma correspondiente para estructuras finitas de diferencia igualmente espaciadas. Podría pensarse que la suposición de monoticidad de que si $(a, p) \sim (b, q)$ y $a > b$, entonces $q > p$, también necesita asumirse como un axioma, pero como mostramos en la prueba del teorema de representación en la sección final, no es necesaria esta suposición adicional: puede demostrarse a partir de los cuatro primeros axiomas solos.

La aseveración del teorema de representación y el de unicidad, al que retornamos ahora, asume exactamente la forma esperada. La única cosa a tomar en cuenta es que las dos funciones de valores reales sobre cada componente están fundidas conjuntamente por la misma unidad, como se refleja por el cambio común de la unidad α en el teorema, aunque sea permitido un origen diferente.

Teorema 4. Sea $\langle A_1, A_2, \succcurlyeq \rangle$ una *estructura finita conjunta aditiva igualmente espaciada.* Entonces existen funciones de valores reales ψ_1 y ψ_2 sobre A_1 y A_2 respectivamente, de tal manera que para a y b en A_1 y p y q en A_2

$$(a, q) \succcurlyeq (b, p) \text{ si y sólo si } \psi_1(a) + \psi_2(q) \geqq \psi_1(b) + \psi_2(p).$$

Más aún, si ψ_1' y ψ_2' son otras dos funciones con la misma propiedad, entonces

$$\psi_1' = \alpha\psi + \beta \text{ y } \psi_2' = \alpha'\psi_2 + \gamma$$

y si A_1 y A_2 tienen al menos dos elementos no equivalentes en orden entonces

$$\alpha = \alpha'$$

Es útil tomar en cuenta que la parte de unicidad del teorema 4 tiene una interpretación geométrica natural. Si pensamos que las funciones ψ_1 y ψ_2 como pares de mapeos en el plano cartesiano, entonces el teorema de unicidad dice, en sentido geométrico estándar, que cualquier cambio de escala debe ser uniforme en cada dirección, pero el origen puede trasladarse por una distancia diferente a lo largo de los diferentes ejes.

6. Pruebas

Aunque los siguientes lemas elementales no son necesarios para dar una prueba del teorema 2, se necesitan en la discusión completamente explícita, y su inclusión tal vez será útil para organizar el pensamiento del lector acerca de las estructuras de diferencia, que no son tan familiares como las estructuras extensivas. Las indicaciones de las pruebas de los lemas elementales se dan solamente en pocos casos.

Todos los lemas se refieren a una estructura cuaternaria fija $\zeta = \langle A, \succcurlyeq \rangle$ y a las relaciones binarias $>$, $\sim$ y J, definidas en la sección 3.

Lema 1. La relación $>$ es asimétrica y transitiva sobre A.

Lema 2. La relación $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva sobre A.

Lema 3. Exactamente una de las siguientes afirmaciones se cumple para cualquier a y b en A: $a > b$, $b > a$, $a \sim b$.

Lema 4. Si $aJ^n b$ entonces $a > b$. (Las pruebas de este y muchos de los lemas siguientes requieren del uso de la inducción sobre n.)[1]

[1] En este y subsecuentes lemas, así como en la prueba del teorema 2 y teoremas

Lema 5. Si $a > b$ entonces hay un n (entero positivo) tal que $aJ^n b$.
Lema 6. Si $aJ^n b$ y $aJ^n c$ entonces $b \sim c$.
Lema 7. Si $aJ^m b$ y $bJ^n c$ entonces $aJ^{m+n} c$.
Lema 8. Si $aJ^m b$ y $aJ^{m+n} c$ entonces $bJ^n c$.
Lema 9. Si $aJ^{m+n} b$ entonces hay una c en A tal que $aJ^m c$.
Lema 10. Si $ab \sim cd$ entonces o bien hay algún n tal que $aJ^n b$ y $cJ^n d$ o bien hay algún n tal que $bJ^n a$ y $dJ^n c$ o bien $a \sim b$ y $c \sim d$.

Regresemos ahora a un esbozo de la prueba del teorema 2. Sea c^* el primer elemento de A con respecto del ordenamiento $>$. Defínase la función numérica ψ sobre A como sigue, para cada a en A:

$$\psi(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \sim c^* \\ -n + 1 \text{ si } c^* J^n a. \end{cases}$$

Entonces empleando los lemas elementales podemos demostrar:

(i) $a > b$ si y sólo si $\psi(a) > \psi(b)$;
(ii) $ab \geqq de$ si y sólo si $\psi(a) - \psi(b) \geqq \psi(d) - \psi(e)$.

Para probar que la función φ es única hasta una transformación lineal, definimos para cada a en A dos funciones h_1 y h_2:

$$h_1(a) = \frac{\psi_1(a) - \psi_1(c^*)}{\psi_1(a) - \psi_1(c^{**})}$$

$$h_2(a) = \frac{\psi_2(a) - \psi_2(c^*)}{\psi_2(c^*) - \psi_2(c^{**})}$$

donde ψ_1 y ψ_2 son dos funciones que satisfacen la construcción de representación y c^* es el primer elemento de A bajo el ordenamiento $\geqq$ y c^{**} el segundo elemento. Podemos fácilmente demostrar que h_1 es una transformación lineal de ψ_1 y h_2 es una transformación lineal

---

posteriores, se usa repetidamente el concepto de n-ésima potencia de la relación binaria J. Este concepto es definido recursivamente así:

$aJ^1 b$ si y sólo si aJb
$aJ^n b$ si y sólo si existe una c tal que $aJ^{n-1} c$ y cJb.

de ψ_2 y también que h_1 es idéntica a h_2. Entonces es fácil probar que ψ_1 es una transformación lineal de ψ_2, es decir, que hay números α, β con $\alpha > 0$ tales que para cada a en A

$$\psi_1(a) = \alpha\psi_2(a) + \beta$$

Prueba del teorema 3

Empezamos con la prueba de dos lemas. El primero corresponde al lema 10 de la prueba del teorema 2 y el segundo al lema 11. Debe notarse que los lemas del teorema 2 que son justamente acerca de las relaciones $>$ y J se aplican aquí también.

Lema 1. Si aJ^nb y bJ^nc entonces $B(abc)$.

Prueba. Procedemos por inducción. Para $n = 1$, tenemos el axioma 5. Supóngase ahora que nuestra hipótesis inductiva se cumple y que tenemos:

$$aJ^{n+1}b \text{ y } bJ^{n+1}c. \tag{1}$$

Entonces sabemos de inmediato por las propiedades de J que hay elementos a' y c' en A tales que:

$$aJa' \text{ y } a'J^nb \tag{2}$$

$$bJ^nc' \text{ y } c'Jc. \tag{3}$$

De donde, por hipótesis inductiva de (2) y (3),

$$B(a'bc') \tag{4}$$

y entonces de (2) y (3) otra vez, así como de (4) y el axioma 6, inferimos $B(abc)$. Como se esperaba.

Lema 2. Si $B(abc)$ entonces hay un n tal que aJ^nb y bJ^nc.

Prueba. De la hipótesis del teorema y el axioma 4, tenemos:

$$a > b \text{ y } b > c,$$

de donde, por propiedades familiares de J, existen m y n tales que

$aJ^m b$ y $bJ^n c$. Supóngase ahora que $m \neq n$; para ser más concretos y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $m > n$. Entonces hay un d tal que $bJ^m d$, de donde, por el lema 1, $B(abd)$, pero por hipótesis $B(abc)$, de donde por el axioma 2, $c \sim d$.

Pero entonces tenemos: $bJ^m c$ y $bJ^n c$, lo cual es imposible, por lo que concluimos $m = n$, como se deseaba.

Dados los lemas 1 y 2, la prueba de la existencia de una función ψ tal que:

(i) $\psi(a) > \psi(b)$ si y sólo si $a > b$ y
(ii) $\psi(b) = \frac{1}{2}(\psi(a) + \psi(c))$ y $\psi(a) > \psi(b) > \psi(c)$ si y sólo si $B(abc)$

es semejante a la prueba de la parte correspondiente al teorema 2 y no necesita desarrollarse aquí en detalle.

Para la demostración de la unicidad de ψ para una transformación lineal, como en el caso de la prueba del teorema 2, asumimos tener dos funciones ψ_1 y ψ_2 que satisfacen ambas (i) y (ii). Entonces definimos h_1 y h_2 tal y como en esa demostración. Por la mera forma de la definición es claro que h_1 es una transformación lineal de ψ_1 y h_2 lo es igualmente de ψ_2. Completamos la prueba por un argumento inductivo para mostrar que $h_1 = h_2$ (de donde ψ_1 es una transformación lineal de ψ_2).

La inducción es con respecto a los elementos de A ordenados por $>$, con c^* como el primer elemento.

Ahora por definición $h_1(c^*) = h_2(c^*) = 0$.

Supóngase ahora que para a_m con $m < n$, $h_1(a_m) = h_2(a_m)$.

Hemos demostrado que $h_1(a_{n+1}) = h_2(a_{n+2})$.

Ahora sabemos de inmediato que $a_{n+1}Ja_n$ y $a_nJa + 1$, de donde en virtud del axioma 5, $B(a_{n-1}, a_n, a_{n+1})$, y por lo tanto por hipótesis

$$2\psi_i(a_n) = \psi_i(a_{n-1}) + \psi_i(a_{n+1}),$$

de donde

$$\psi_i(a_{n+1}) = 2\psi_i(a_n) - \psi_i(a_{n+1}),$$

para $i = 1, 2$. Ahora, ya que h_i es una transformación lineal de ψ_i, se sigue que también tenemos

$$h_i(a_{n+1}) = 2h_i(a_n) - h_i(a_{n-1}),$$

pero por hipótesis inductiva el lado derecho de esta última ecuación es la misma para h_1 y h_2, y así concluimos

$$h_1(a_{n+1}) = h_2(a_{n+1}).$$

Prueba del teorema 4

Antes que nada, sobre la base de los axiomas 1-3 de la definición 9, los siguientes lemas acerca del orden inducido sobre los dos componentes A_1 y A_2, pueden demostrarse fácilmente.

Lema 1. La relación $\sim$ sobre A_i, para $i = 1, 2$, es una relación de equivalencia, i.e., es reflexiva, simétrica y transitiva.

Lema 2. La relación $>$ sobre A_i, para $i = 1, 2$, es asimétrica y transitiva.

Lema 3. Para a y b en A_1, exactamente una de las siguientes: $a \sim b$, $a > b$, $b > a$. Para p y q en A_2, exactamente una de las siguientes: $p \sim q$, $p > q$, $q > p$.

A continuación demostramos los dos lemas mencionados anteriormente en la discusión de los axiomas de la definición 9.

Lema 4. Si $(a, p) \sim (b, q)$ y $a > b$ entonces $q > p$.

Prueba. Supóngase que no sucede que $q > p$. Entonces por el lema 3 o bien $p \sim q$ o $p > q$. Si $p \sim q$ entonces $(a, p) \sim (a, q)$, de donde por transitividad y por la hipótesis del lema, $(b, q) \sim (a, q)$ y así $b \sim a$, lo que contradice al lema 3 y a la hipótesis $a > b$. Por el otro lado, también se obtiene una contradicción de la suposición alternativa, i.e., $p > q$. Dado que tenemos $(a, p) > (a, q)$, de donde por propiedades familiares del orden débil y por la hipótesis del lema, $(b, q) > (a, q)$ y entonces $b > a$, lo que nuevamente contradice el lema 3 y la hipótesis de que $a > b$. Así concluimos que de la hipótesis del lema se sigue $q > p$, como se deseaba.

Lema 5. Si $(a, p) \sim (b, q)$ y $p > q$ entonces $b > a$.

Prueba. Idéntica en estructura a la del lema 4.

Regresamos a continuación a la prueba del teorema 4. La prueba se asemeja bastante a la del teorema 2. Sea c^* el primer elemento de A_1 con respecto al ordenamiento $\geqq$ sobre A_1 y sea r^* el primer elemento de A_2 con respecto al ordenamiento $\geqq$ sobre A_2. Definimos, entonces, las funciones numéricas ψ_1 y ψ_2 sobre A_1 y A_2 como sigue (para a en A_1 y p en A_2):

$$\psi_1(a) = \begin{cases} 1 \text{ si } a \sim c^* \\ -n + 1 \text{ si } c^* J^n a \end{cases}$$

$$\psi_2(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } pIr^* \\ -n + 1 \text{ si } r^* J^n p \end{cases}$$

Como en el caso de la prueba del teorema 2, es fácil mostrar que

$$a > b \text{ si y sólo si } \psi_1(a) > \psi_1(b)$$
$$p > q \text{ si y sólo si } \psi_2(p) > \psi_2(q).$$

Más aún, los lemas 1-9 que se probaron para la demostración del teorema 2 también se cumplen en el presente arreglo, ya que sólo dependen de las relaciones binarias sobre los componentes. Desde luego, para cada uno de esos lemas, hay, hablando estrictamente, ahora un par de lemas, uno para el ordenamiento sobre cada componente.

De acuerdo al lema 10 de la lista anterior, podemos probar por el mismo argumento inductivo, usando el axioma 4 de la definición 9:

(i) Si aJ^nb y pJ^nq entonces $(a, q) \sim (b, p)$. Segundo, podemos probar el hecho elemental de que:

(ii) Si $(a, q) \sim (b, p)$ entonces o (a) hay algún n tal que aJ^nb y pJ^nq o (b) hay algún n tal que bJ^na y qJ^np o (c) $a \sim b$ y $p \sim q$.

De (i) y (ii) probamos entonces el resultado fundamental de que $(a, q) \sim (b, q)$ si y sólo si $\psi_1(a) + \psi_2(q) = \psi_1(b) + \psi_2(p)$, lo que completa la primera parte del teorema 4.

Para probar la unicidad de los resultados sobre ψ_1 y ψ_2 podemos proceder como en el caso del teorema 2. Definimos cuatro funciones:

$$g(a) = \frac{\psi_1(a) - \psi_1(c^*)}{\psi_1(c^*) - \psi_1(c^{**})'}$$

$$g'(a) = \frac{\psi_1'(a) - \psi_1'(c^*)}{\psi_1'(c^*) - \psi_1'(c^{**})'}$$

$$h(p) = \frac{\psi_2(p) - \psi_2(r^*)}{\psi_2(r^*) - \psi_2(r^{**})'}$$

$$h'(p) = \frac{\psi_2'(p) - \psi_2'(r^*)}{\psi_2'(r^*) - \psi_2'(r^{**})'}$$

donde c^* es el primer elemento de A, bajo el orden $\geqq$ sobre A_1, c^{**} es el segundo elemento, r^* es el primer elemento de A_2, y r^{**} el segundo. Es, como antes, obvio que g es una transformación lineal de ψ_1, g' una transformación lineal de ψ_1', h una transformación lineal de ψ_2 y h' una transformación lineal de ψ_2'. En segundo lugar, podemos mostrar que $g = g'$ y $h = h'$ por un argumento inductivo similar al empleado en la prueba del teorema 3. Así, llegamos a que hay números α, α', β y γ con α, $\alpha' > 0$ tal que para cada a en A_1 y cada p en A_2:

(iii) $\psi_1'(a) = \alpha\psi_1(a) + \beta$ y $\psi_2'(p) = \alpha'\psi_2(p) + \gamma$.

Queda por mostrar que $\alpha = \alpha'$ cuando tanto A_1 como A_2 tienen a lo menos dos elementos no equivalentes en cuanto a orden. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $a > b$ y $p > q$. Entonces tenemos de $(a, q) \sim (b, p)$,

$$\psi_1'(a) - \psi_1'(b) = \psi_2'(p) - \psi_2'(q),$$

y entonces por (iii)

$$\frac{\alpha\psi_1(a) - \alpha\psi_1(b)}{\alpha'\psi_2(p) - \alpha'\psi_2(q)} = 1$$

y así

$$\frac{\alpha(\psi_1(a) - \psi_1(b))}{\alpha'(\psi_2(p) - \psi_2(q))} = 1, \text{ pero por hipótesis}$$

$$\psi_1(a) - \psi_1(b) = \psi_2(p) - \psi_2(q),$$

de donde $\dfrac{\alpha}{\alpha'} = 1,$

i.e., $\alpha = \alpha'$

lo que completa la demostración.

Capítulo 13

PROBLEMAS DEL ANALISIS CAUSAL EN LAS CIENCIAS SOCIALES*

Este artículo se ocupa con las perspectivas y problemas del análisis causal en las ciencias sociales. Por un lado, durante los últimos cuarenta años se ha desarrollado una metodología estadística elaborada y poderosa. La profundidad de esos desarrollos excede con mucho la de cualquier otro tiempo en la historia de la estadística. Por otro lado, sólo muy recientemente el foco de atención de extensas discusiones en las ciencias sociales ha sido un análisis causal muy explícito. Siento que los varios desarrollos en economía, filosofía y sociología vienen a dar juntos una nueva síntesis de ideas acerca de la causalidad altamente aplicable.

No daré una bibliografía detallada de los desarrollos a los que me refiero, porque ha sido dada más bien recientemente de una manera completa por Paul Humphreys (no publicado), sino me concentraré en el problema de introducir más elementos estructurales en el análisis causal.

---

* Originalmente publicado en *Epistemologia*, Rivista Italiana di Filosofia della Scienza, V, número especial, 1982, pp. 239-250. Versión castellana de José Luis Rolleri.

1. Definición formal

La literatura filosófica ha tendido a enfatizar la discusión de la causalidad en términos de sucesos, pero la literatura en estadística y en ciencias sociales casi uniformemente formula los conceptos causales en términos de variables aleatorias. Son varias las razones de esto. Por un lado, hay un interés continuo en tratar propiedades cuantitativas y relaciones causales entre ellas. Para este propósito el lenguaje de sucesos es difícil de usar de una manera eficiente y natural. Por otro lado, ordinariamente uno no está interesado en construir un espacio de muestras detallado sino sólo en contar con el teorema de consistencia de Kolmogorov para saber que existe uno.

Con este marco de referencia en mente, empiezo usando algunas definiciones y teoremas formales que provienen de un trabajo anterior sobre estas cuestiones (Suppes (1970)).

Causas prima facie

La definición de causa *prima facie* asume que la influencia causal está temporalmente ordenada, con causas que preceden estrictamente a sus efectos en el tiempo. Hay algunas bases para argüir que la causa y el efecto pueden ser simultáneos, pero ignoraré esta complicación aquí.

(D1) La propiedad $Y_{t'}$ es una *causa prima facie cuadrante (débil)* de la propiedad X_t si y sólo si:
(i) $t' < t$,
(ii) para toda x e y si $P(Y_{t'} \geqq y) > 0$, entonces

$$P(X_t \geqq x \mid Y_{t'} \geqq y) \geqq P(X_t \geqq x).$$

El término *cuadrante* se usa porque (ii) puede escribirse:

$$P(X_t \geqq x,\ Y_{t'} \geqq y) \geqq P(X_t \geqq x)\, P(Y_{t'} \geqq y),$$

que expresa una comparación entre la probabilidad de cualquier cuadrante $X_t \geqq x$, $Y_{t'} \geqq y$ bajo la distribución dada y la probabilidad de este cuadrante en el caso de independencia.

En la literatura de la estadística aplicada la noción más común de

dependencia entre variables aleatorias o propiedades cuantitativas es la de correlación. Siguiendo los métodos de Lehmann (1966) podemos demostrar el siguiente teorema que muestra que la noción de causa *prima facie* definida aquí implica la de correlación no negativa.

(T1) Si $Y_{t'}$ es una causa *prima facie* cuadrante de X_t y si las varianzas de $Y_{t'}$ y X_t existen así como sus covarianzas y si ninguna de ellas es cero, entonces la correlación de X_t e $Y_{t'}$ no es negativa.

Obviamente esta definición es demasiado simple para cualquier explicación completa. Es patente que las causas *prima facie* pueden ser espurias. Un ejemplo típico y familiar sería la caída de un barómetro precediendo una tormenta. Dado nuestro conocimiento moderno de la meteorología, no creemos que la caída del barómetro es una causa genuina de la tormenta.

Por esta razón introduzco la noción de causa espuria.

Causa espuria

La definición es una extensión obvia de la primera. Una causa espuria debe ser una causa *prima facie*.

(D2) Una propiedad $Y_{t'}$ es una *causa espuria cuadrante* de X_t si y sólo si hay una $t'' < t'$ y una propiedad $Z_{t''}$ tal que:
(i) $Y_{t'}$ es una causa débil prima facie cuadrante de $X_{t'}$
(ii) para toda x, y y z si $P(Y_{t'} \geqq y, Z_{t''} \geqq z) > 0$, entonces $P(X_t \geqq x \mid Y_{t'} \geqq y, Z_{t''} \geqq z) = P(X_t \geqq x \mid Z_{t''} \geqq z)$.

En la literatura de la estadística aplicada, la noción que claramente más corresponde a la de causalidad espuria cuadrante es la de correlación espuria. Hablando a grandes rasgos, se dice que dos variables aleatorias están correlacionadas espuriamente si puede mostrarse que la correlación entre ellas desaparece cuando una tercera variable se introduce y se «mantiene constante». La necesidad de investigar la posibilidad de correlación espuria antes de usar la existencia de una correlación para hacer una inferencia acerca de las relaciones causales se ha reconocido ampliamente en estadística. Una buena discusión detallada de la significación causal de correlaciones espurias se encuentra en Simon (1954).

Correspondiendo al teorema precedente acerca de las correlacio-

nes podemos demostrar el siguiente teorema acerca de las correlaciones espurias.

(T2) La causalidad espuria cuadrante implica correlación espuria.

Causa genuina

Definimos una causa *prima facie* como *genuina* (relativa a un marco conceptual dado) si y sólo si no es espuria. Nótese que la definición de genuino debe relativizarse a un marco conceptual. No hay ni metafísicamente ni científicamente un último concepto de causa genuina.

2. Algunos problemas

Discutiré dos problemas que son importantes en la aplicación de los conceptos generales recién definidos para el análisis científico detallado. Uno es el problema de la interacción mutua de causas y el otro es el problema de identificar estados internos. Introducimos estos dos problemas simplemente como muestra de los tipos de dificultades que surgen y necesitan pensarse ulteriormente.

Problema de interacción

Especialmente en aplicaciones en las ciencias sociales, pero también en física clásica, surge el problema de la interacción entre individuos, quienes se influyen casualmente uno al otro. El ejemplo famoso en la mecánica clásica es la gravitación universal. Probablemente no hay ejemplos tan sobresalientes en las ciencias sociales, pero hay un buen número de tipos bien definidos de tal interacción en psicología y economía. Para ilustrar un tipo de ataque y un tipo de desarrollo subsecuente que le sigue, esbozaré el siguiente ejemplo ampliado de un trabajo anterior en psicología matemática (Lamperti y Suppes [1959]).

Los modelos que considero se aplican a una situación experimental que consiste en una secuencia de pruebas. En cada prueba, el sujeto del experimento da una respuesta, la cual es seguida por un suceso de

reforzamiento. Así, un experimento puede ser representado por una secuencia $(A_1, E_1, A_2, E_2, \ldots, A_n, E_n, \ldots)$ de variables aleatorias, donde la elección de letras sigue las convenciones establecidas en la literatura, el valor de la variable aleatoria A_n es un número j que representa la respuesta real en la prueba n, y el valor de E_n es un número k que representa el suceso de reforzamiento en la prueba n. El dato relevante en cada prueba puede entonces representarse por un par ordenado (j, k) de enteros con $1 \leqq j \leqq r$ y $0 \leqq k \leqq t$, esto es, consideramos en general r respuestas y $t + 1$ sucesos de reforzamiento. Cualquier secuencia de esos pares de enteros es una secuencia de los valores de las variables aleatorias y representan así un resultado experimental posible. El objetivo general de la teoría es predecir la distribución de la probabilidad de la variable aleatoria de respuesta cuando una distribución particular, o una clase de distribuciones, es impuesta sobre la variable aleatoria de reforzamiento.

La teoría se formula para la probabilidad de una respuesta sobre la prueba $n + 1$ *dada* la secuencia entera precedente de respuestas y reforzamientos. Para esta secuencia precedente uso la notación x_n. Así,

$$x_n = (k_n, j_n, k_{n-1}, j_{n-1}, \ldots, k_1, j_1).$$

(Es conveniente escribir esas secuencias en este orden, pero nótese que la numeración aquí es del pasado al presente, y no al revés.) Nuestro único axioma es la siguiente suposición de linearidad:

Axioma L. Si $E_n = k$ y $P(x_n) > 0$, entonces:

$$P(A_{n+1} = j \mid x_n) = (1 - \theta_k)\, P(A_n = j \mid x_{n-1}) + \theta_k \lambda_{jk}, \qquad (1)$$

donde

$$0 \leqq \theta_k, \lambda_{jk} \leqq 1 \text{ y } \sum_j \lambda_{jk} = 1.$$

También defino aquí ciertos momentos que son de interés experimental. Los *momentos* $\alpha_{j,n}^{v}$ de las probabilidades de respuesta de la prueba n son:

$$\alpha_{j,n}^{\nu} = \sum_{x_{n-1}} P^{\nu}(A_n = j \mid x_{n-1})\, P(x_{n-1}). \tag{2}$$

y si los límites apropiados existen, definimos

$$\alpha_j^{\nu} = \lim_{n \to \infty} \alpha_{j,n}^{\nu}. \tag{3}$$

Los momentos (2) se forman de una manera no asimétrica; sin embargo, entran de una manera natural en la expresión de cantidades que son fácilmente observables experimentalmente, por ejemplo, la probabilidad conjunta $P(A_{n+1} = j,\ A_n = j)$. (Para otros ejemplos, véase Estes y Suppes, [1959].)

También estamos interesados en estudiar extensiones de modelos lineales para situaciones multipersonales. Podemos suponer que tenemos s sujetos en una situación tal que la probabilidad de un suceso de reforzamiento particular para cualquier sujeto dependerá en general de respuestas precedentes y reforzamientos de los otros $s - 1$ sujetos así como de sus propias respuestas y reforzamientos anteriores. Los datos de cada prueba pueden entonces representarse por un $2s$-tuplo ordenado $(j_1, k_1, \ldots, j_s, k_s)$ de enteros con $1 \leqq j_i \leqq r_i$, $0 \leqq k_i \leqq t_i$, para $i = 1, \ldots, s$, y cualquier secuencia de tales tuplos representa un resultado experimental posible. Sean $A_n^{(i)}$ y $E_n^{(i)}$ las variables aleatorias de respuesta y reforzamiento para el i-ésimo sujeto en la prueba n. Podemos entonces generalizar el Axioma L a:

Axioma M. Para $1 \leqq i \leqq s$, si $E_n^{(i)} = k$ y $P(x_n) > 0$, entonces

$$P(A^{(i)} = j \mid x_n) = (1 - \theta_k^{(i)})\, P(A_n^{(i)} = j \mid x_{n-1}) + \theta_k^{(i)}\, \lambda_{jk}^{(i)}, \tag{4}$$

donde

$$0 \leqq \theta_k^{(i)},\ \lambda_{jk}^{(i)} \leqq 1 \quad \text{y} \quad \sum_j \lambda_{jk}^{(i)} = 1.$$

Se reportan en Suppes y Atkinson (1960) amplios exámenes experimentales del Axioma M para situaciones bipersonales. Sea $x^{(i)}$ precisamente la secuencia de los primeros $n - 1$ respuestas y reforzamientos del sujeto i. Es una consecuencia del Axioma M que

$$P(A_n^{(i)} = j \mid x^{(i)}) = P(A_n^{(i)} = j \mid x_{n-1}),$$

y es en términos de $x^{(i)}$ que definimos los momentos $\alpha^{(i)}_{v,j,n}$ de manera exactamente análoga a (2). También debemos estar interesados en los momentos de unión

$$\gamma^{v}_{j_1,\ldots,j_s,n} = \sum_{x_{n-1}} P^{v}(A^{(i)}_n = j_1, \ldots, A^{(s)}_n = j_s \mid x_{n-1})P(x_{n-1}). \tag{5}$$

y, si es que existen, sus asíntotas $\gamma^{v}_{j_1,\ldots,j_s}$. Para trabajar con estos últimos momentos en términos del Axioma M necesitamos la razonable suposición adicional de que cuando todas las $n-1$ respuestas precedentes y reforzamientos están dados, la respuesta s en la prueba n es estadísticamente independiente:

Axioma I. Si $P(x_{n-1}) > 0$, entonces

$$P(A^{(i)}_n = j_1, \ldots, A^{(s)}_n = j_s \mid x_{n-1}) = \prod_{i=1}^{s} P(A^{(i)}_n = j_i \mid x_{n-1}).$$

La restricción experimental implicada por el Axioma I ha sido satisfecha en estudios multipersonales empleando el modelo lineal.

Desde el punto de vista causal, la cuestión interesante acerca de estas situaciones multipersonales es que la respuesta de una persona es una causa *prima facie* de una respuesta posterior de alguna otra persona, aunque podemos demostrar, usando el Axioma I, que esas respuestas son espurias. En otras palabras, lo que podemos demostrar usando los Axiomas L, M e I es que para una respuesta individual en una situación multipersonal interactiva sólo la secuencia de reforzamientos precedentes es genuinamente causal. Para una discusión ulterior de este punto, véase Suppes (1970).

Nótese que lo que pasa en este ejemplo de la teoría del aprendizaje es típico. Empezamos con la interacción superficial, pero después vamos más profundamente a eliminar la interacción directa. En el caso presente eliminamos las interacciones causales en términos de respuestas yendo directamente a la información obtenida del esquema de reforzamiento estocástico. No quiero sugerir que podemos hacer esto en todos los tipos de interacción social. Quisiera decir, de hecho, mi propio punto de vista de que, especialmente en el caso de la adquisición del lenguaje, son precisamente las respuestas de la madre que sirven como la influencia causal más importante sobre la adquisición

del lenguaje para el niño —un punto de vista que difícilmente es nuevo—.

Pero he elegido el limitado ejemplo presente porque ilustra muy bien el principio general. Este principio general es exhibido también en el caso clásico de la gravitación. Hemos ido a partir de pensar en atracción directa entre cuerpos a la presencia de un campo gravitacional. Es bien cierto que podemos querer considerar a este campo gravitacional como parte de una geometría espacio-temporal, pero existen otros ejemplos que hacen al mismo punto —campos electromagnéticos, por ejemplo, para evitar acciones a distancia en casos de propagación finita.— Nos movemos desde las interacciones mutuas de cuerpos a interacciones de campos sobre cuerpos.

El problema de identificar estados internos

Un rasgo particular del ejemplo recién considerado ilustra un problema común a la física y a las ciencias sociales, pero también uno cuya solución en las ciencias físicas parece difícil de imitar en las ciencias sociales. Tengo en mente la postulación de estados internos y estructuras relacionadas que no pueden ser observadas directamente para eliminar una regresión causal al pasado. Por ejemplo, al considerar las propiedades fenomenológicas corrientes de un objeto físico, ahora postulamos casi sin pensar que esas propiedades están determinadas por una estructura atómica particular del objeto en el tiempo presente. No es necesario saber nada acerca de la historia del objeto desde un punto de vista teórico si conocemos su microestructura corriente. Para conocer las propiedades fenomenológicas de una substancia particular no es necesario rastrear la historia de la substancia en detalle y cómo esas propiedades han evolucionado en tanto que la substancia cambia de un estado a otro, sino es suficiente hacer pruebas para la pureza de la muestra en términos de su estructura atómica y de esta determinación inferir todas sus otras propiedades fenomenológicas. Este truncamiento radical del pasado es uno de los conceptos generales más esenciales en las ciencias físicas. Los éxitos particulares que han sido alcanzados en la física moderna y en la química llevando este enfoque al límite representan el logro más profundo en la historia de la ciencia.

La cuestión inquietante consiste en la medida en que una metodología similar del análisis causal puede perseguirse a un nivel detallado

en las ciencias sociales. Para evitar cualquier confusión en este punto, dejemos claro que la cuestión no es de creencia filosófica general. Es razonable creer que las acciones de una persona en un momento dado están probabilísticamente determinadas por la experiencia pasada de su sistema nervioso central y por los estados presentes de muchas substancias químicas, tales como hormonas, enzimas, etc., en su cuerpo en el instante presente. No tenemos que aceptar la concepción filosófica de una acción directa a distancia a través del tiempo, tal que un suceso que ocurre en la niñez afecta directamente una acción en la madurez sin beneficio de estados internos intermedios. La mayoría de la gente razonable probablemente negaría la creencia en tal acción remota a distancia a través del tiempo. La dificultad es más bien científica que filosófica, pero es tan científicamente profunda que debe afectar nuestra concepción filosófica general de lo que es posible en las ciencias sociales.

El problema es simplemente el de ser capaces de postular estados internos detallados de los que tenemos alguna esperanza de ser capaces de identificar por métodos empíricos reales. El gran éxito de la física y la química ha dependido de la identificación estructural de las substancias, módulo por lo menos de las propiedades fenomenológicas que hemos investigado hasta ahora con alguna minuciosidad. Es una tesis plausible que no tenemos en el caso de las personas, o incluso otros animales, nada como tales uniformidades de estructura; más bien, una estructura interna personal en un momento dado no es de ninguna manera interesante isomórfica a la estructura interna de otra persona. Por «manera interesante» quiero decir, por supuesto, en términos de propiedades psicológicas y no propiedades físicas crasas. Si la situación es tan desesperanzada como estoy inclinado a creer, significa que la metodología de las ciencias sociales y el desarrollo de las teorías causales deben tomar direcciones tan diferentes de las que han sido tan exitosas en las ciencias físicas.

En referencia al ejemplo de aprendizaje considerado anteriormente, hay una concisa manera técnica de poner la cuestión. El tipo de modelo de aprendizaje considerado es, desde un punto de vista estadístico, un proceso estocástico que es una cadena de orden infinito. La propiedad de una respuesta presente depende del pasado completo del organismo. En contraste, una teoría del estado-interno de tales cuestiones podría postular una estructura interna con una propiedad markoviana: dado el conocimiento presente del estado interno, ningún cambio en la predicción del comportamiento futuro

podría surgir de tener un conocimiento completo del pasado. Lo que puede ser característico de las ciencias sociales y lo que las hace científicamente muy difíciles es que no seremos capaces de ir desde cadenas de orden infinito en términos de variables fenomenológicas a procesos de Markov ampliados bien definidos con estados teóricamente subyacentes que proveen conocimiento del pasado ocioso. El pesimismo de este punto de vista no es de ninguna manera sería relevado por el amplio interés corriente en psicología cognoscitiva y la postulación de mobiliarios mentales que ninguna persona sería con buen sentido podría negar. No es que nosotros no tengamos procesos internos, ni que no tengamos algún conocimiento de esos procesos, pero es que la unicidad de esos procesos en cada individuo en todas sus semejanzas constituyen una barrera impenetrable al tipo de leyes en psicología que igualarían el gran éxito teórico en física.

Si mis puntos de vista sobre estas cuestiones son de alguna manera algo correctos, constituyen una justificación diferente del tipo de análisis fenomenológico de la causalidad en términos probabilísticos característico de muchas aplicaciones modernas de la estadística en las ciencias sociales. Aquellos de ustedes que les gustaría ver un desarrollo teórico más profundo que fuera más allá de estas aplicaciones fenomenológicas probablemente continuarán desilusionados.

Consideraciones conclusivas

He tratado de ofrecer un marco general para el análisis causal en las ciencias sociales y he dado uno o dos ejemplos que propiamente pertenecen a esas ciencias. Por el otro lado, quiero enfatizar que solamente he borroneado la superficie de un largo y complejo tema. Ha habido en años recientes, como indiqué al inicio, una considerable literatura en economía y sociología sobre la causalidad. No he intentado revisar esa literatura de ninguna manera sistemática, pero las ideas generales que he establecido son compatibles con la mayoría de los pensamientos de esos desarrollos. Aquellos desarrollos, en buena medida, han tenido lugar en relación con aplicaciones prácticas en un escenario propiamente estadístico y no con teorías deterministas de la causalidad reminicentes de la física clásica del siglo diez y nueve.

No he dicho nada realmente, por supuesto, acerca de la teoría estadística asociada con las ideas desarrolladas en líneas generales. Esa

es otra historia y demasiado compleja incluso como para esbozarla aquí. Quiero enfatizar, sin embargo, que es importante llevar cualquier teoría causal a la madurez mostrando cómo se relaciona en detalle a la teoría y a la práctica estadística.

REFERENCIAS

ABRAHAM (1967): R. Abraham, *Foundations of Mechanics* (Fundamentos de la mecánica), Benjamin, Nueva York, 1967.

ADAMS (1954): E. W. Adams, *Axiomatic Foundations of Rigid Body Mechanics* (Fundamentos axiomáticos de la mecánica del sólido rígido), Stanford University, tesis doctoral, 1954.

ADAMS (1959): E. W. Adams, «The Foundations of Rigid Body Mechanics and the Derivation of its Laws from those of Particle Mechanics» (Los fundamentos de la mecánica del sólido rígido y la derivación de sus leyes de las de la mecánica de partículas), en *The Axiomatic Method with special reference to Geometry and Physics,* L. Henkin *et al* (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1959.

ARROW (1951): K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values* (Elección social y valores individuales), Nueva York, 1951.

AYDELOTTE *et al* (1971): W. O. Aydelotte, A. G. Bogue y R. W. Fogel (eds.), *The Dimensions of Quantitative Research in History* (Las dimensiones de la investigación cuantitativa en la historia), Princeton, Nueva Jersey, Princeton University Press, 1971.

BERGMANN y SPENCE (1944): G. Bergmann y K. W. Spence, «The Logic of Psychophysical Measurement» (La lógica de la medición psicofísica), *Psychological Review,* LI, 1944.

BEVER *et al* (1968): T. G. Bever, J. A. Fodor y M. Garrett, «A Formal Limitation of Associationism». (Una limitación formal del asociativismo)

en *Verbal Behavior and General Behavior Theory*, T. R. Dixon y D. L. Horton (eds.), Englewood Cliffs, Nueva Jersey, Prentice-Hall, 1968.

BHABHA (1949): H. J. Bhabha, «On the postulational basis of the Theory of elementary particles» (Sobre la base postulacional de la teoría de las partículas elementales), *Review of Modern Physics*, vol. 21, 1949.

BIRKHOFF (1948): G. Birkhoff, *Lattice Theory* (Teoría de retículos), edición revisada, Sociedad matemática americana, Nueva York, 1948.

BLACKWELL y GIRSCHICK (1954): D. Blackwell y M. A. Girschick, *Theory of Games and Statistical Decisions* (Teoría de juegos y decisiones estadísticas), Wiley y Co.

BOGOLUBOV *et al* (1975): N. N. Bogolubov, A. A. Logunov y I. T. Todorov (eds.). *Introduction to Axiomatic Quantum Field Theory* (Introducción a la teoría axiomática del campo cuántico), Benjamin, Reading, MA, 1975.

BUSH y ESTES (1959): R. R. Bush y W. K. Estes (eds.), *Studies in Mathematical Learning Theory* (Estudios en la teoría matemática del aprendizaje), Stanford University Press, Stanford, Calif., 1959.

CAMPBELL (1920): N. R. Campbell, *Physics: The Elements* (Física: Los Elementos), Cambridge University Press, Cambridge, 1920.

CAMPBELL (1928): N. R. Campbell, *An Account of the Principles of Measurement and Calculation*. (Una explicación de los principios de la medición y el cálculo), Longmans, Green, Londres y Nueva York, 1928.

CARNAP (1936-37): R. Carnap, «Testability and Meaning» (Comprobabilidad y significado), *Philosophy of Science* 3, 1936 y 4, 1937.

CARNAP (1950): R. Carnap, *Logical Foundations of Probability* (Fundamentos lógicos de la probabilidad), Chicago, 1950.

CHOMSKY (1959): N. Chomsky, «Review of B. F. Skinner, *Verbal Behavior*» (Resención de *Conducta verbal* de B. F. Skinner), *Language* 35, 1959.

CROTHERS y SUPPES (1967): E. Crothers y P. Suppes, *Experiments in Second-language Learning* (Experimentos en el aprendizaje de una segunda lengua), Nueva York, Academic Press, 1967.

DEBREU (1959): G. Debreu, *Theory Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium* (Teoría del valor: Un análisis axiomático del equilibrio económico), Wiley, Nueva York, 1959.

DOMOTOR (1969): Z. Domotor, *Probabilistic relational structures and their applications* (Estructuras relacionales probabilistas y sus aplicaciones), reporte técnico n.° 144, Instituto de estudios matemáticos en las ciencias sociales, Universidad de Stanford, 1969.

DOMOTOR (1972): Z. Domotor, «Causal models and the space-time geometries» (Modelos causales y geometrías espacio-temporales), *Synthese* 24, 1972.

DOBB (1960): J. L. Dobb, «Some Problems concerning the Consistency of Mathematical Models» (Algunos problemas relativos a la consistencia de modelos matemáticos), en *Information and Decision Processes*, R. E. Machol (ed.), McGraw-Hill, Nueva York, 1960.

ESTES y SUPPES (1959): W. K. Estes y P. Suppes, «Foundations of Linear Models» (Fundamentos de los modelos lineales), *Studies in Mathematical Learning Theory*, R. R. Bush y W. K. Estes (eds.), Stanford University Press, Stanford, 1959.

FORDER (1927): H. G. Forder, *The Foundations of Euclidean Geometry* (Los fundamentos de la geometría euclidiana), Cambridge, Cambridge University Press, 1927. Reimpreso en Dover, Nueva York, 1958.

FRANK (1946): P. Frank, *Foundations of Physics* (Fundamentos de la Física), International Encyclopedia of Unified Science, vol. I, n.° 7, 1946.

FRASER (1937): L. M. Fraser, *Economic Thought and Language* (Pensamiento económico y lenguaje), Londres, 1937.

GOODMAN (1951): N. Goodman, *The Structure of Appearance* (La estructura de la apariencia), Cambridge, Mass. 1951.

GRANGER (1969): C. W. J. Granger, «Investigating Causal Relations by Econometric Models and Cross-Spectral Methods» (Investigando relaciones causales por modelos econométricos y métodos espectrales en cruz), *Econometrica* 37, 1969.

GRUNBAUM (1963): A. Grunbaum, *Philosophical Problems of Space and Time* (Problemas filosóficos del espacio y el tiempo), Knopf, Nueva York, 1963.

HAMEL (1901): G. Hamel, «Die Axiome der Mechanik», *Handbuch der Physik* 5, 1901.

HAMEL (1908): G. Hamel, «Uber die Grundlagen der Mechanik», *Mathematische Annalen* 66, 1908.

HEMPEL (1950a): C. G. Hempel, «Problems and changes in the empiricist criterion of meaning» (Problemas y cambios en el criterio empirista de significado), *Revue Internationale de Philosophie*, n.° 11, 1950.

HEMPEL (1950b): C. G. Hempel, «The concept of cognitive significance: a reconsideration» (El concepto de significación cognoscitiva: una reconsideración), *Proc. of the Amer. Academy of Arts and Science* 80, 1950.

HEMPEL (1952): C. G. Hempel, *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science* (Fundamentos de la formación de conceptos en las ciencias empíricas), International Encyclopedia of Unified Science, vol. II, n.° 7, 1952.

HERMES (1938): H. Hermes, *Eine Axiomatisierung der allgemeinen Mechanik* (Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, Neue Folge, Heft 3), S. Hirzel, Leipzig.

HÖLDER (1901): O. Hölder, «Die Axiome der Quantitat und die Lehre vom Mass», Ber. D. Sachs., *Gesellsch. Wiss., Math-Phys.* Klasse, 53, 1901.

HOSOYA (1977): Y. Hosoya, «On the Granger Condition for Non-causality» (Sobre la condición de Granger para la no causalidad), *Econometrica* 7, 1977.

HUDGIN (1972): R. H. Hudgin, «Coordinate-free relativity» (Relatividad libre de coordenadas), *Synthese* 24, 1972.

HUMPHREYS (1976): P. Humphreys, *Inquiries in the Philosophy of Probability: Randomness and independence* (Indagaciones en la filosofía de la probabilidad: aleatoriedad e independencia), disertación doctoral no publicada, Universidad de Stanford, 1976.

KANT (1786): I. Kant, *Die metaphysischen Anfangsgrunde der Naturwissenchaft*, 1786.

KATZ y POSTAL (1964): J. J. Katz y P. M. Postal, *An Integrated Theory of Linguistic Descriptions* (Una teoría integral de las descripciones lingüísticas), Cambridge, Mass, MIT Press, 1964.

KHINCHIN (1949): A. I. Khinchin, *Statistical Mechanics* (Mecánica estadística), Dover, Nueva York, 1949.

KOCHEN y SPECKER (1965): S. Kochen y E. P. Specker, «Logical Structures arising in Quantum Theory» (estructuras lógicas que surgen en la teoría cuántica) en *Theory of Models*, J. W. Addison *et al* (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1965.

KRANTZ (1967): D. H. Krantz, «Extensive Measurement in Semiorders» (Medición extensiva en semiórdenes), *Philosophy of Science*, 34, 1967.

KRANTZ *et al* (1971): D. H. Krantz, R. D. Luce, P. Suppes y A. Tversky, *Foundations of Measurement* (Fundamentos de la medición), vol. I, Academic Press, Nueva York, 1971.

KREISEL (1967): G. Kreisel, «Informal Rigour and Completeness Proofs» (Rigor informal y demostraciones completas) en *Problems in the Philosophy of Mathematics*, I, Lakatos (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1967.

LAMPERTI y SUPPES (1959): J. Lamperti y P. Suppes, «Chains of Infinite Order and Their Application to Learning Theory» (Cadenas de órdenes infinitos y sus aplicaciones a la teoría del aprendizaje), *Pacific Journal of Mathematics* 9, 1959.

LATZER (1972): R. W. Latzer, «Nondirected light signals and the structure of time» (Señales de luz indirectas y la estructura del tiempo), *Synthese* 24, 1972.

LEHMANN (1966): «Some concepts of Dependence» (Algunos conceptos de dependencia), *The Annals of Mathematical Statistics Association*, 37, 1966.

LINDSAY y MARGENAU (1936): R. B. Lindsay y H. Margenau, *Foundations of Physics* (Fundamentos de la física), Nueva York, 1936.

LITTLE (1950): I. M. D. Little, *A Critique of Welfare Economics* (Una crítica del bien económico), Oxford, 1950.

LUCE (1956): R. D. Luce, «Semiorders and a Theory of Utility Discrimination» (Semiórdenes y una teoría de la discriminación de la utilidad), *Econometrica*, 24, 1956.

MACH (1942): E. Mach, *Science of Mechanics* (La ciencia de la mecánica), traducido del alemán por T. J. McCormick, 5.ª edición americana, La Salle, Ill., 1942.

McKINSEY y SUPPES (1953a): J. C. C. McKinsey y P. Suppes, «Philosophy and the Axiomatic Foundations of Physics» (Filosofía y los fundamentos axiomáticos de la física), *Proceedings of the Eleventh International Congress of Philosophy* 6, 1953. Artículo 1 de este libro.

McKINSEY y SUPPES (1953b): J. C. C. McKinsey y P. Suppes, «Transformations of Systems of Classical Particle» (Transformaciones de sistemas de la mecánica clásica de partículas), *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 2, 1953.

McKINSEY y SUPPES (1955): J. C. C. McKinsey y P. Suppes, «On the notion of invariance in Classical Mechanics» (Sobre la noción de invariancia en la mecánica clásica), *British Journal for Philosophy of Science* 5, 1955.

McKINSEY *et al* (1953): J. C. C. McKinsey, A. C. Sugar y P. Suppes, «Axiomatic Foundations of Classical Particle Mechanics» (Fundamentos axiomáticos de la mecánica clásica de partículas), *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 2, 1953.

MILL (1936): J. S. Mill, *A System of Logic* (Un sistema de lógica), Longmans Green, N. Y., 1936.

MONTAGUE (1970): R. Montague, «English as a formal language» (El Inglés como un lenguaje formal) en *Linguaggi Nella Societa e Nella Tecnica*, B. Visentini *et al* (eds.), Milán, 1970.

NAGEL (1931): E. Nagel, «Measurement» (Medición), *Erkenntnis* 2, 1931.

NAGEL (1949): E. Nagel, «The meaning of reduction in the natural sciences» (El significado de la reducción en las ciencias naturales) en *Science and Civilization*, R. C. Stauffer (ed.), Madison, Wisconsin, 1949.

NEUGEBAUER (1975): O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy* (Una historia de la astronomía matemática antigua), 3 volúmenes, Springer-Verlag, Nueva York, 1975.

NEURATH (1938): O. Neurath, «Unified Science as Encyclopedic Integration» (Ciencia unificada como integración enciclopédica) en *International Encyclopedia of Unified Science*, O. Neurath et al, vol. I, n.° 1, University of Chicago Press, Chicago, 1938.

von NEWMANN y MORGENSTERN (1947): J. von Newmann y O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavoir* (Teoría de juegos y comportamiento económico), 2.ª edición, Princeton, 1947.

NEWTON (1769): I. Newton, *Universal Arithmetick*, traducido por el Sr. Raphson y corregido por el Sr. Cunn J. Senex, Londres, 1769.

NOLL (1959): W. Noll, «The Foundations of Classical Mechanics in the light of recent advances in Continuum Mechanics» (Los fundamentos de la mecánica clásica a la luz de avances recientes en la mecánica del continuo), *Proc. Internal. Sympos.*, Universidad de California, Berkeley, North-Holland, Amsterdam, 1959.

PADOA (1901): A. Padoa, «Essai d'une théorie algébrique des nombres entiers, précédé d'une introduction logique a une théorie déductive

quelconque», *Bibliotheque du Congres International de Philosophie 1900, París* 3, 1901.

REICHENBACH (1944): H. Reichenbach, *Philosophic Foundations of Quantum Mechanics* (Fundamentos filosóficos de la mecánica cuántica), University of California Press, Berkeley, Calif., 1944.

ROBB (1936): A. A. Robb, *Geometry of Space and Time* (Geometría del espacio y el tiempo), University Press, Cambridge, 1936.

ROBBINS (1935): L. Robbins, *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science* (Un ensayo sobre la naturaleza y la significación de la ciencia económica), 2.ª edición, Londres, 1935.

ROBERTS (1968): F. S. Roberts, «Representation of Indifference Relations» (Representación de relaciones de indiferencia), Departamento de Matemáticas, Universidad de Stanford, 1968.

ROTTMAYER (1970): W. A. Rottmayer, *A Formal Theory of Perception* (Una teoría formal de la percepción), reporte técnico 161, Instituto de estudios matemáticos en las ciencias sociales, Universidad de Stanford, Stanford, Calif., 1970.

RUBIN y SUPPES (1954): H. Rubin y P. Suppes, «Transformations of Systems of Relativistic Particle Mechanics» (Transformaciones de sistemas de la mecánica relativista de partículas), *Pacific Journal of Mathematics* 4, 1954.

RUSSELL (1903): *Principles of Mathematics* (Principios de la matemática), G. Allen & Unwin, Londres, 1903.

SCOTT (1964): D. Scott, «Measurement Structures and Linear Inequatities» (Estructuras de medición y desigualdades lineales), *Journal of Mathematics Psychology* 1, 1964.

SCOTT y SUPPES (1958): D. Scott y P. Suppes, «Foundational Aspects of Theories of Measurement» (Aspectos fundacionales de las teorías de la medición), *Journal of Symbolic Logic* 28, 1958.

SIMON (1954): H. A. Simon «Spurious Correlation: A Causal Interpretation» (Correlaciones espurias: una interpretación causal), *Journal of American Statistical Association* 49, 1954.

SIMON (1957): H. A. Simon, *Models of Man* (Modelos del hombre), Wiley, Nueva York, 1957.

SIMS (1972): C. A. Sims, «Money, income and Causality» (Dinero, ingreso y causalidad), *American Economic Review* 62, 1972.

SKINNER (1977): B. F. Skinner, *Verbal Behavior* (Conducta verbal), Appleton, Nueva York, 1977.

SMITH y KREUTZBERG (1976): B. H. Smith y G. W. Kretzberg, «Neurontarget Cell Interactions» (Interacciones entre células neuronales), *Neurosciences Research Program Bulletin* 14, 1976.

SUPPES (1951): P. Suppes, «A Set of Independence Axioms for Extensive Quantities» (Un conjunto de axiomas independientes para cantidades extensivas), *Portugaliae Mathematica* 10, 1951. Capítulo 11 en este libro.

SUPPES y WINET (1955): P. Suppes y M. Winet, «An axiomatization of Utility

Based on the notion of Utility Difference» (Una axiomatización de la utilidad basada en la noción de diferencia utilitaria), *Journal of Management Science* 1, 1955. Resumen en *Bull. Amer. Math. Soc.* 60.

SUPPES (1957): P. Suppes, *Introduction to Logic* (Introducción a la Lógica), Van Nostrand, Princeton, 1957.

SUPPES (1959a): P. Suppes, «Axioms for Relativistic Kinematics with or Without Parity» (Axiomas para la cinemática relativista con o sin paridad) en *The Axiomatic Method with special reference to Geometry and Physics*, L. Henkin *et al* (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1959.

SUPPES (1959b): P. Suppes, «A Linear Model for a Continuum of Responses» (Un modelo lineal para un continuo de respuestas) en *Studies in Mathematical Learning Theory*, R. R. Bush y W. K. Estes (eds.), Stanford University Press, Stanford, Calif., 1959.

SUPPES y ATKINSON (1960a): P. Suppes y E. C. Atkinson, *Markov Learning Models for Multipersons Interactions* (Modelos Markov de aprendizaje para interacciones multipersonales), Stanford University Press, Stanford, Calif., 1960.

SUPPES (1960b): P. Suppes, «A Comparison of the Meaning and Uses of Models in Mathematics and the Empirical Sciences» (Una comparación del significado y los usos de los modelos en las matemáticas y las ciencias empíricas), *Synthese* 12, 1960. Capítulo 8 de este libro.

SUPPES (1962): P. Suppes, «Models of Data» (Modelos de datos) en *Logic, Methodology and the Philosophy of Science*, E. Nagel *et al* (eds.), Stanford University Press, Stanford, Calif., 1962. Capítulo 9 de este libro.

SUPPES y ZINNES (1963): P. Suppes y J. L. Zinnes, «Basic Measurement Theory» (Teoría básica de la medición) en *Handbook of Mathematical Psychology*, R. D. Luce *et al* (eds.), Wiley, Nueva York, 1963.

SUPPES (1966): P. Suppes, «The Probabilistic Argument for a Non-Classical Logic in Quantum Mechanics» (El argumento probabilista para una lógica no clásica en mecánica cuántica), *Philosophy of Science* 33, 1966.

SUPPES (1967a): P. Suppes, «What is a Scientific Theory?» (¿Qué es una teoría científica?) en *Philosophy of Science Today*, S. Morgenbesser (ed.), Basic Books, Nueva York, 1967.

SUPPES (1967b): P. Suppes, *Set-Theoretical Structures in Science* (Estructuras conjuntistas en ciencia), edición mimeografiada, Universidad de Stanford, 1967.

SUPPES (1969a): P. Suppes, *Studies in the Methodology and Foundations of Science: Selected Papers from 1951 to 1969* (Estudios en la metodología y los fundamentos de la ciencia: escritos selectos de 1951 a 1969), Reidel, Dordrecht, 1969.

SUPPES (1969b): P. Suppes, «Stimulus-response Theory of Finite Automata» (Teoría estímulo-respuesta de autómatas finitos), *Journal of Mathematical Psychology* 6, 1969.

SUPPES (1970): P. Suppes, *A Probabilistic Theory of Causality* (Una teoría probabilista de la causalidad), *Acta Philosophica Fennica* 24, North-Holland, Amsterdam, 1970.

SUPPES (1973a): P. Suppes, «New Foundations of Objective Probability: Axioms for Propensities» (Nuevos fundamentos de la probabilidad objetiva: axiomas para la propensión) en *Logic, Methodology and Philosophy of Science IV*, P. Suppes (ed.), North-Holland, Amsterdam, 1973.

SUPPES (1973b): P. Suppes, «Semantics of Context-free Fragments of Natural Languages» (Semántica de los fragmentos libres de contexto de los lenguajes naturales) en *Approaches to Natural Language*, J. Hintikka *et al* (eds.), Reidel, Dordrecht, 1973.

SUPPES (1974): P. Suppes, «Aristotle's Concept of Matter and its Relations to Modern Concepts of Matter» (El concepto aristotélico de materia y sus relaciones con conceptos modernos de materia), *Synthese* 28, 1974.

SUPPES (1975): P. Suppes, «From Behaviorism to Neobehaviorism» (Del conductismo al neoconductismo), *Theory and Decision* 6, 1975.

TARSKI (1953): A. Tarski, «A General Method in Proofs of Undecidability» (Un método general en demostraciones de indecidibilidad) en A. Tarski *et al* (eds.), *Undecidable Theories*, North-Holland, Amsterdam, 1953.

TARSKI (1954/55): A. Tarski, «Contributions to the Theory of Models» (Contribuciones a la teoría de modelos), *Indagationes Mathematicae*, I y II, 16 (1954); III, 17 (1955).

TARSKI (1956): A. Tarski, «Uber die Beschanktheit der Ausdrucksmittel deduktiver Theoriem» en *Logic, Semantics and Metamathematics. Papers from 1923-1938*, Clarendon Press, Oxford, 1956.

TARSKI (1959): A. Tarski, «What is Elementary Geometry?» (¿Qué es la geometría elemental?) en *The Axiomatic Method with special reference to Geometry and Physics*, L. Henkin *et al* (eds.), North-Holland, Amsterdam, 1959.

TITIEV (1969): R. J. Titiev, *Some model-theoretic results in measurement theory* (Algunos resultados modelo-teóricos en la teoría de la medición), reporte técnico n.° 146, Instituto de estudios matemáticos en las ciencias sociales, Universidad de Stanford, 1969.

TODHUNTHER (1949): I. Todhunter, *A History of the Mathematical Theory of Probability* (Una historia de la teoría matemática de la probabilidad), Chelsea, Nueva York, 1949.

VARADARAJAN (1962): V. S. Varadarajan, «Probability in Physics and a Theorem on simultaneous observability» (Probabilidad en física y un teorema sobre observabilidad simultánea), *Comm. Pure Appl. Math.* 15, 1962.

VARADARAJAN (1968): V. S. Varadarajan, *Geometry on Quantum Theory* (Geometría en teoría cuántica), vol. 1, Van Nostrand, Princeton, Nueva Jersey, 1968.

WALD (1950): A. Wald, *Statistical Decision Functions* (Funciones de decisión estadística), Nueva York, 1950.

WHEELER (1962): J. A. Wheeler, «Curved Empty Space-time as the Building Material of the Physical World: An Assessment» (Espacio-tiempo vacío curveado como el material de construcción del mundo físico: una contribución) en *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, E. Nagel *et al* (eds.), Stanford University Press, Stanford, Calif., 1962.

WOODGER (1937): J. H. Woodger, *The Axiomatic Method in Biology* (El método axiomático en biología), Cambridge, Inglaterra, 1937.

WOODGER (1952): J. H. Woodger, *Biology and Language* (Biología y lenguaje), Cambridge, Inglaterra, 1952.

ZEEMAN (1964): E. C. Zeeman, «Causality implies the Lorentz group» (La causalidad implica el grupo de Lorentz), *Journal of Mathematical Physics* 4, 1964.

BIBLIOGRAFIA DE PATRICK SUPPES

1951

A set of independent axioms for extensive quantities. *Portugaliae Mathematica*, 10, 163-172.

1953

Axiomatic foundations of classical particle mechanics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2, 253-272 (con J. C. C. McKinsey & A. C. Sugar). (Trad. castellana de A. G. de la Sienra: Fundamentos axiomáticos para la mecánica de partículas clásica. Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, México, 1978.)

Transformations of systems of classical particle mechanics. *Journal of Rational Mechanics and Analysis*, 2, 273-289 (con J. C. C. McKinsey).

Philosophy and the axiomatic foundations of physics. *Proceedings of the Eleventh International Congress of Philosophy*, 6, 49-54 (con J. C. C. McKinsey).

1954

Descartes and the problem of action at a distance. *Journal of the History of Ideas*, **15**, 146-152.

Some remarks on problems and methods in the philosophy of science. *Philosophy of Science*, **21**, 242-248.

Transformations of systems of relativistic particle mechanics. Pacific Journal of Mathematics, 1954, **4**, 563-601 (con H. Rubin).

1955

Outlines of a formal theory of value, I. *Philosophy of Science*, **22**, 140-160 (con D. Davidson & J. C. C. McKinsey).

On the notion of invariance in classical mechanics. *British Journal for Philosophy of Science*, **5**, 290-302 (con J. C. C. McKinsey).

A note on two-place predicates and fitting sequences of measure functions. *Journal of Symbolic Logic*, **20**, 121-122 (con H. Rubin).

An axiomatization of utility based on the notion of utility differences. *Journal of Management Science*, **1**, 259-270 (con M. Winet). Reimpreso en A. F. Veinott, Jr. (Ed.), *Mathematical studies in management science*. Stanford University Press, Stanford, Calif., 1965, pp. 284-295.

1956

Nelson Goodman on the concept of logical simplicity. *Philosophy of Science*, **23**, 153-159.

The role of subjective probability and utility in decision-making. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, 1954-1955, **5**, 61-73.

A finitistic axiomatization of subjective probability and utility. *Econometrica*, **24**, 264-275 (con D. Davidson).

1957

Introduction to logic. Van Nostrand, Nueva York. Trad. castellana por G. A. Carrasco. *Introducción a la lógica simbólica*. Compañía Editorial Continental, S. A., México, 1966.

Decision making: An experimental approach. Stanford University Press, Stanford, Calif. (con D. Davidson & S. Siegel). (Midway Reprint, 1977, University of Chicago Press, Chicago.)

1958

An analysis of two-person game situations in terms of statistical learning theory. *Journal of Experimental Psychology*, 55, 369-378 (con R. C. Atkinson).

Foundational aspects of theories of measurement. *Journal of Symbolic Logic*, 23, 113-128 (con D. Scott).

1959

The axiomatic method with special reference to geometry and physics. (Proceedings of an international symposium held at the University of California, Berkeley, diciembre 26, 1957 - enero 4, 1958.) North-Holland: Amsterdam (dirigido con L. Henkin & A. Tarski).

A linear model for a continuum of responses. En R. R. Bush & W. K. Estes (Eds.), *Studies in mathematical learning theory*. Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 400-414.

Measurement, empirical meaningfulness and three-valued logic. En C. W. Churchman & P. Ratoosh (Eds.), *Measurement: Definitions and theories*. Wiley, Nueva York, pp. 129-143.

Applications of a Markov model to two-person noncooperative games. En R. R. Bush & W. K. Estes (Eds.), *Studies in mathematical learning theory*. Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 65-75 (con R. C. Atkinson).

Foundations of linear models. En R. R. Bush & W. K. Estes (Eds.), *Studies in mathematical learning theory*. Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 137-179 (con W. K. Estes).

Chains of infinite order and their application to learning theory. *Pacific Journal of Mathematics*, 9, 739-754 (con J. Lamperti). (Revisión de «Chains of infinite order and their application to learning theory». *Pacific Journal of Mathematics*, 1965, 15, 1471-1472.)

A model for the experimental measurement of the utility of gambling. *Behavioral Science*, 4, 11-18 (con H. L. Royden & K. Walsh).

A non-linear model for the experimental measurement of utility. *Behavioral Science*, 4, 204-211 (con K. Walsh).

Geometry in the first grade. *American Mathematical Monthly*, 66, 505-506 (con N. Hawley).

1960

Axiomatic set theory. Van Nostrand, Nueva York. Trad. castellana por H. A. Castillo. *Teoría axiomática de conjuntos*. Editorial Norma, Cali, Colom-

bia, 1968, 171 pp. Edición rev. y abreviada: Nueva York, Dover, 1972, 267 pp.

Markov learning models for multiperson interactions. Stanford University Press, Stanford, Calif. (con R. C. Atkinson).

Mathematical methods in the social sciences, 1959: Proceedings of the first Stanford symposium. Stanford University Press, Stanford, Calif., (dirigido con K. J. Arrow & S. Karlin).

Geometry for primary grades: Book 1. Holden-Day, San Francisco (con N. Hawley). Traducción: *Geometría para los grados primarios.* Editorial Departamento de Instrucción Pública, San Juan, Puerto Rico, 1964. *Géométrie pour classes élémentaires.* Livre 1. Gontran Trottier, Montreal, Canadá, 1965.

Geometry for primary grades. Book 2. Holden-Day, San Francisco (con N. Hawley). Traducción: *Geometría para los grados primarios.* Libro 2. Editorial Departamento de Instrucción Pública, San Juan, Puerto Rico, 1966.

A comparison of the meaning and uses of models in mathematics and the empirical sciences. *Synthese,* **12,** 287-301. Trad. checa: Srovnání vyznamu a pouzití modelu v matematice a v empirickych vedách. En K. Berka & L. Tondl (Eds.), *Teorie modelu a modelování.* Reidel, Dordrecht, 1967, pp. 208-222.

Problem analysis and ordinary language. *Proceedings of the Twelfth International Congress of Philosophy,* 4, 331-337.

Some open problems in the foundations of subjective probability. En R. E. Machol (Ed.), *Information and decision processes.* Nueva York, McGraw Hill, pp. 162-169.

Stimulus sampling theory for a continuum of responses. En K. J. Arrow, S. Karlin, & P. Suppes (Eds.), *Mathematical methods in the social sciences, 1959.* Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 348-365.

Some asymptotic properties of Luce's beta learning model. *Psychometrika,* **25,** 233-241 (con J. Lamperti).

1961

Behavioristic foundations of utility. *Econometrica,* **29,** 186-202.

The philosophical relevance of decision theory. *Journal of Philosophy,* **58,** 605-614.

Probability concepts in quantum mechanics. *Philosophy of Science,* **28,** 378-389.

Test of stimulus sampling theory for a continuum of responses with unimodal noncontingent determinate reinforcement. *Journal of Experimental Psychology,* **61,** 122-132 (con R. W. Frankmann).

Stochastic learning theories for a response continuum with non-determinate reinforcement. *Psychometrika*, 26, 373-390 (con J. Zinnes).

Applications of stimulus sampling theory to situations involving social pressure. *Psychological Review*, 68, 46-59 (con F. Krasne).

Sets and numbers in grade one, 1959-1960. *The Arithmetic Teacher*, 8, 287-290 (con B. McKnight).

1962

Logic, methodology and philosophy of science: Proceedings of the 1960 international congress. Stanford University Press, Stanford, Calif. (dirigido con E. Nagel & A. Tarski).

Mathematical methods in small group processes. Stanford University Press, Stanford, Calif. (dirigido con J. H. Criswell & H. Solomon).

Models of data. En E. Nagel, P. Suppes, & A. Tarski (Eds.), *Logic, methodology and philosphy of science: Proceedings of the 1960 international congress.* Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 252-261. Traducción checa: Modely dat. En K. Berka & L. Tondl (Eds.), *Teorie modelu a modelování.* Reidel, Dordrecht, 1967, pp. 223-235.

Recent developments in utility theory. *Recent advancements in game theory*, Princeton University Conference, 61-72.

Experimental analysis of a duopoly situation from the standpoint of mathematical learning theory. *International Economic Review*, 3, 60-78 (con J. M. Carlsmith).

Application of a stimulus sampling model to children's concept formation with and without overt correction responses. *Journal of Experimental Psychology*, 63, 330-336 (con R. Ginsberg).

Experimental studies of mathematical concept formation in young children. *Science Education*, 46, 230-240 (con R. Ginsberg).

Analysis of social conformity in terms of generalized conditioning models. En J. H. Criswell, H. Solomon, & P. Suppes (Eds.), *Mathematical methods in small group processes.* Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 334-361 (con M. Schlag-Rey).

The concept of set. *The Grade Teacher*, 79, 51; 86-90 (con S. Hill).

Mathematical logic for the schools. *The Arithmetic Teacher*, 9, 369-399 (con S. Hill).

Test of some learning models for double contingent reinforcement. *Psychological Reports*, 10, 259-268 (con M. Schlag-Rey).

1963

The role of probability in quantum mechanics. En B. Baumrin (Ed.), *Philosophy of science: The Delaware Seminar.* Wiley, Nueva York, pp. 319-337.

Set theory in the primary grades. *New York State Mathematics Teacher's Journal,* 13, 46-53.

A fundamental property of all-or-none models, binomial distribution of responses prior to conditioning, with application to concept formation in children. *Psychological Review,* 70, 139-161 (con R. Ginsberg).

Basic measurement theory. En R. D. Luce, R. R. Bush, & E. H. Galanter (Eds.), *Handbook of mathematical psychology* (Vol. 1). Wiley, Nueva York, 1963, pp. 3-76 (con J. L. Zinnes). (Trad. al ruso, Mir, Moscú, 1967. Reimpreso en B. Lieberman (Ed.), *Contemporary problems in statistics.* Oxford University Press, Nueva York, 1971.

1964

First course in mathematical logic. Blaisdell, Nueva York, (con S. Hill). Trad. al castellano por E. L. Escardo. *Introducción a la lógica matemática.* Editorial, S. A., Barcelona, 1968.

The ability of elementary-school children to learn the new mathematics. *Theory into Practice,* 3, 57-61.

The formation of mathematical concepts in primary-grade children. En A. H. Passow & R. R. Leeper (Eds.), *Papers from the ASCD Eighth Curriculum Research Institute,* pp. 99-119.

Modern learning theory and the elementary-school curriculum. *American Educational Research Journal,* 1, 79-93. Reimpreso en H. C. Lindgren (Ed.), *Readings in educational psychology.* Wiley, Nueva York, 1968, pp. 207-222. Reimpreso también en R. Ripple (Ed.), *Readings in learning and human abilities.* Harper & Row, Nueva York, 1971. Reimpreso también en H. C. Lindgren & F. Lindgren (Eds.), *Current readings in educaitonal psychology* (2nd ed.). Wiley, Nueva York, 1971, pp. 216-230. Reimpreso también en Bobbs-Merrill Reprint Series in Psychology, p. 810, Prod. N.° 69065. (Trad. al japonés de W. H. Holtzman (Ed.), *Computer-assisted instruction, testing and guidance.* Harper & Row, Nueva York, 1970.)

On an example of unpredictability in human behavior. *Philosophy of Science,* 31, 143-148.

Problems of optimization in learning a list of simple items. En M. W. Shelly, II, & G. L. Bryan (Eds.), *Human judgments and optimality.* Wiley, Nueva York, pp. 116-126.

Some current developments in models of learning for a continuum of responses. (Discrete Adaptive Processes Symposium, American Institute of Electrical Engineers, junio 1962.) *The Institute of Electrical and*

Electronics Engineers Transactions on Applications and Industry, 83, 297-305.

Latency phenomena in prolonged learning of visual representations of Russian sounds. *International Review of Applied Linguistics*, 2, 205-217 (con E. Crothers & R. Weir).

Probability learning of rats in continuous-time experiments. *Psychonomic Science*, 1, 361-362 (con E. Karsh).

A simple discrimination experiment with a continuum of responses. En R. C. Atkinson (Ed.), *Studies in mathematical psychology*. Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 317-357 (con H. Rouanet).

Empirical comparison of models for a continuum of responses with noncontingent bimodal reinforcement. En R. C. Atkinson (Ed.), *Studies in mathematical psychology*. Stanford University Press, Stanford, Calif., pp. 358-359 (con H. Rouanet, M. Levine, & R. W. Frankmann).

1965

The kinematics and dynamics of concept formation. En Y. Bar-Hillel (Ed.), *Proceedings for the 1964 International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science*. North-Holland, Amsterdam, pp. 405-414.

Computer-based mathematics instruction. *Bulletin of the International Study Group for Mathematics* Learning, 3, 7-22.

Learning the new mathematics. En *New Directions in Mathematics*. Membership Service Bulletin 16-A, Association for Childhood Education International, pp. 57-64.

Logics appropriate to empirical theories. En J. W. Addison, L. Henkin, & A. Tarski (Eds.), *Theory of models*. (Reseña del Simposio int. de Berkeley, 1963.) North-Holland, Amsterdam, pp. 364-375. Reimpreso en C. A. Hooker (Ed.), *The logico-algebraic approach to quantum mechanics*. Dordrecht, Reidel, 1975, pp. 329-340.

On the behavioral foundations of mathematical concepts. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, 30, 60-96.

Towards a behavioral foundation of mathematical proofs. En K. Ajdukiewicz (Ed.), *The foundations of statements and decisions*. (Reseña del International Colloquium on Methodology of Science, septiembre 18-23, 1961.) PWN - Polish Scientific Publishers, Varsovia, pp. 327-341.

Experimental teaching of mathematical logic in the elementary school. *The Arithmetic Teacher*, 12, 187-195.

Accelerated program in elementary-school mathematics—1.^{er} año. *Psychology in the Schools*, 2, 195-203 (con D. Hansen).

Observable changes of hypotheses under positive reinforcement. *Science*, 148, 661-662 (con M. Schlag-Rey).

Preference, utility and subjective probability. En R. D. Luce, R. R. Bush, &

E. H. Galanter (Eds.), *Handbook of mathematical psychology* (Vol. 3). Wiley, Nueva York, pp. 249-410 (con R. D. Luce).

Latencies on last error in paired-associate learning. *Psychonomic Science*, 2, 15-16 (con M. Schlag-Rey & G. Groen).

1966

Aspects of inductive logic. North-Holland, Amsterdam (dirigido con J. Hintikka).

Sets and numbers. (Serie elemental de matemáticas para escuelas, grados K-6). Random House, Nueva York.

Accelerated program in elementary-school mathematics—2.° año. *Psychology in the Schools*, 3, 294-307.

The probabilistic argument for a non-classical logic of quantum mechanics. *Philosophy of Science*, 33, 14-21. Trad. francesa: L'argument probabiliste pour une logique non classique de la mecanique quantique, *Synthese*, 16, 74-85.) Reimpreso en J. L. Destouches (Ed.), *E. W. Beth Memorial Colloquium.* Logic and Foundations of Science, París, Institut Henri Poincaré, mayo 19-21, 1964. Reimpreso también en C. A. Hooker (Ed.), *The logico-algebraic approach to quantum mechanics.* Reidel, Dordrecht, 1975, pp. 341-350.

Concept formation and Bayesian decisions. En J. Hintikka & P. Suppes (Eds.), *Aspects of inductive logic.* North-Holland, Amsterdam, pp. 21-48.

Probabilistic inference and the concept of total evidence. En J. Hintikka & P. Suppes (Eds.), *Aspects of inductive logic.* North-Holland, Amsterdam, pp. 49-65.

A Bayesian approach to the paradoxes of confirmation. En J. Hintikka & P. Suppes (Eds.), *Aspects of inductive logic.* North-Holland, Amsterdam, pp. 198-207.

Some formal models of grading principles. *Synthese*, 16, 284-306.

Towards a behavioral psychology of mathematical thinking. En J. Bruner (Ed.), *Learning about learning* (entrevista). U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., pp. 226-234.

The psychology of arithmetic. En J. Bruner (Ed.), *Learning about learning* (entrevista). U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., pp. 235-242.

Applications of mathematical models of learning in education. En H. O. A. Wold (Scientific Organizer), *Model building in the human sciences.* (Encuentro de Mónaco en Ciencias Humanas, Sesión 1964.) Union Europienne D'Editions, Monaco, pp. 39-49.

Mathematical concept formation in children. *American Psychologist*, 21, 139-150.

The axiomatic method in high school mathematics. En *The role of axiomatics*

and problem solving in mathematics. (The Conference Board of the Mathematical Sciences.) Ginn, Washington, D.C., pp. 69-76.

The uses of computers in education. Scientific American, **215**, 206-220. Reinpreso en *Information: A Scientific American Book.* Freeman, San Francisco, pp. 157-174. (Trad. alemana: Anwendungen elektronischer Rechenanlagen in Unterricht. En *Information Computer und kunstliche Intelligenz.* Umschau, Frankfurt am Main, 1967, pp. 157-172.) Reimpreso también en *Mathematical thinking in behavioral sciences: Readings from Scientific American.* Freeman, San Francisco y Londres, 1968, pp. 213-222. (Trad. rusa: En *Informatsia,* Moscú, Mir, 1968, pp. 165-182.) (Trad. japonesa: En *Scientific American Book Information,* 1969.) (Trad. polaca: Zastosowania maszyn cyfronwych w nauczaniu - tlum. Tadeusz Wiewiórowski. En *Dzis i jutro maszyn cyfrowych.* Varsovia, 1969, pp. 231-256.) Reimpreso también en *Computers and computation: Readings from Scientific American.* Freeman, San Francisco, 1971, pp. 249-259. Reprinted also in *Contemporary Psychology: Readings from Scientific American.* Freeman, San Francisco, 1971, pp. 257-267.

A continuous-response task with nondeterminate, contingent reinforcement. *Journal of Mathematical Psychology,* 3, 197-216 (con J. L. Zinnes).

A model for response latency in paired-associate learning. *Journal of Mathematical Psychology,* 3, 99-128 (con G. Groen & M. Schlag-Rey).

Arithmetic drills and review on a computer-based teletype. *The Arithmetic Teacher,* 13, 303-309.

Plug-in instruction. *Saturday Review,* 49(30), 25; 29-30.

Tomorrow's education. *Education Age,* 2, 4-11.

1967

Experiments in second-language learning. Academic Press, Nueva York, (con E. Crothers).

The psychological foundations of mathematics. En *Les modèles et la formalisation du comportement.* (Coloquios internacionales del Centre National de la Recherche Scientifique.) Editions du Centre National de la Recherche Scientifique, París, pp. 213-242.

Decision theory. En *Encyclopedia of philosophy* (Vol. 2). Macmillan y Free Press, Nueva York, pp. 310-314.

What is a scientific theory? En S. Morgenbesser (Ed.), *Philosophy of science today.* Basic Books, Nueva York, pp. 55-67.

Some extensions of Randall's interpretation of Kant's philosophy of science. En J. P. Anton (Ed.), *Naturalism and historical understanding: Essays on the philosophy of John Herman Randall, Jr.* State University of New York Press, Nueva York, pp. 108-120.

Foundations of stimulus-sampling theory for continuous-time processes. *Journal of Mathematical Psychology,* 4, 202-225 (con J. Donio).

Some problems in the geometry of visual perception. *Synthese,* 17, 173-201 (con F. S. Roberts).

Linear structural models for response and latency performance in arithmetic on computer-controlled terminals. En J. P. Hill (Ed.), *Minnesota symposia on child psychology.* University of Minnesota Press, Minneapolis, pp. 160-200 (con L. Hyman & M. Jerman).

Some theoretical models for mathematics learning. *Journal of Research and Development in Education,* 1, 5-22.

On using computers to individualize instruction. En D. D. Bushnell & D. W. Allen (Eds.), *The computer in American education.* Wiley, Nueva York, pp. 11-24.

Some counting models for first-grade performance data on simple addition facts. En J. M. Scandura (Ed.), *Research in mathematics education.* National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., pp. 35-43 (con G. Groen).

Accelerated program in elementary-school mathematics—Tercer año. *Psychology in the Schools,* 4, 293-309 (con C. Ihrke). Reimpreso en R. B. Ashlock & W. L. Herman, Jr. (Eds.), *Current research in elementary school mathematics.* Macmillan, Nueva York, 1970, pp. 359-374.

The case for information-oriented (basic) research in mathematics education. En J. M. Scandura (Ed.), *Research in mathematics education.* National Council of Teachers of Mathematics, Washington, D.C., pp. 1-5. Reimpreso en J. A. McIntosh (Ed.), *Perspectives on secondary mathematics education.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1971, pp. 233-236.

The teacher and computer-assisted instruction. *National Education Association Journal,* 56(2), 15-32.

The computer and excellence. *Saturday Review,* 50(2), 46-50.

Computer-based instruction. *Electronic Age,* 26, 2-6.

The teaching machine. *Christian Science Monitor,* agosto 10, p. 11.

1968

Computer-assisted instruction: Stanford's 1965-66 arithmetic program. Academic Press, Nueva York (con M. Jerman & D. Brian).

Information processing and choice behavior. En I. Lakatos & A. Musgrave (Eds.), *Problems in the philosophy of science.* North-Holland, Amsterdam, pp. 278-299.

The desirability of formalization in science. *Journal of Philosophy,* 65, 651-664. (Trad. rumana: Dezirabilitatea formalizarii in stiinta. En I. Parvu (Ed.), *Epistemologie: Orientari contemporane.* Editura Política, Bucarest, 1974, pp. 268-283.)

Can there be a normative philosophy of education? En G. L. Newsome, Jr. (Ed.), *Philosophy of education 1968.* (Reseña del 24 Congreso anual de Philosophy of Education Society—Santa Mónica, abril 7-10, 1968.) Studies in Philosophy and Education, Southern Illinois University, Edwardsville, Ill., 1968, pp. 1-12. Reimpreso en J. P. Strain (Ed.), *Modern philosophies of education.* Random House, Nueva York, 1971, pp. 277-288.

Mathematics. En *International encyclopedia of the social sciences* (Vol. 10). Nueva York: Macmillan & Free Press, pp. 65-76 (con R. D. Luce).

Models, mathematical. En *International encyclopedia of the social sciences* (Vol. 10). Macmillan and Free Press, Nueva York, pp. 65-76 (con R. D. Luce). Reimpreso en *International Encyclopedia of Statistics.* Free Press, Nueva York, 1978.

Higher-order dimensions in concept identification. *Psychonomic Science,* 11, 141-142 (con M. Schlag-Rey).

Concept formation by kindergarten children in a card-sorting task. *Journal of Experimental Child Psychology,* 6, 212-230 (con I. Rosenthal-Hill).

Quantifier-free axioms for constructive plane geometry. *Compositio Mathematica,* 20, 143-152 (con N. Moler).

Computer technology and the future of education. *Phi Delta Kappan,* 44, .420-423.

1969

Studies in the methodology and foundations of science: Selected papers from 1951 to 1969. Reidel, Dordrecht.

Sets, numbers, and systems. Books 1 and 2. Random House, Nueva York (con B. Meserve & P. Sears).

Philosophy, science, and method: Essays in honor of Ernest Nagel. St. Martin's Press, Nueva York (dirigido con S. Morgenbesser & M. White).

Research for tomorrow's schools: Disciplined inquiry for education. Macmillan, Nueva York (dirigido con L. J. Cronbach).

Stimulus-response theory of finite automata. *Journal of Mathematical Psychology,* 6, 327-355.

Stimulus-response theory of automata and TOTE hierarchies: A reply to Arbib. *Psychological Review,* 76, 511-514. Reimpreso en J. M. Scandura (Ed.), *Structural learning: II. Issues and approaches.* Gordon & Breach, Nueva York, 1976.

Nagel's lectures on Dewey's logic. En S. Morgenbesser, P. Suppes, & M. White (Eds.), *Philosophy, science and method: Essays in honor of Ernest Nagel.* St. Martin's Press, Nueva York, pp. 2-25.

Computer-assisted instruction: An overview of operations and problems. En A. J. H. Morrell (Ed.), *Information processing 68* (Vol. 2). (Reseña del

IFIP Congress 1968, Edinburgo.) North-Holland, Amsterdam, pp. 1103-1113.

Computer-assisted instruction at Stanford. *Educational Technology*, 9(1), 22-24 (con M. Jerman).

Computer-assisted instruction at Stanford. *Educational Television International*, 3(3), 176-179 (con M. Jerman).

Some perspectives on computer-assisted instruction. *Educational Media*, 1(4) (con M. Jerman).

A workshop on computer-assisted instruction in elementary mathematics. *The Arithmetic Teacher*, 16, 193-197.

Problem-solving on a computer-based teletype. *Educational Studies in Mathematics*, 2, 1-15 (con E. Loftus & M. Jerman). (Trad. rumana: Rezolvarea problemelor la un telescriptor conectat cu un calculator electronic. En E. Fischbein & E. Rusu (Eds.), *Invatamintul matematic in lumea contemporana*. Editura Didactica si Pedagogica, Bucarest, 1971, pp. 276-296.)

Computer-assisted instruction. *Science*, 166, 343-350 (con M. Morningstar). Reprinted in D. A. Erickson (Ed.), *Educational organization and administration*. McCutchan, Berkeley, Calif., 1977, pp. 236-254.

1970

A probabilistic theory of causality. (Acta Philosophica Fennica, 24.) North-Holland, Amsterdam.

Information and inference. Reidel, Dordrecht (dirigido con J. Hintikka).

Probabilistic grammars for natural languages. *Synthese*, 22, 95-116. Reimpreso en D. Davidson & G. Harman (Eds.), *Semantics of natural language*. Reidel, Dordrecht, 1972, pp. 741-762.

Learning and the structure of information: En J. Hintikka & P. Suppes (Eds.), *Information and inference*. Reidel, Dordrecht, pp. 197-259 (con D. Jamison & D. Lhamon).

Systems analysis of computer-assisted instruction. En G. J. Kelleher (Ed.), *The challenge to systems analysis*. Wiley, Nueva York, pp. 98-110.

Four programs in computer-assisted instruction. En W. H. Holtzman (Ed.), *Computer assisted instruction, testing, and guidance*. Harper & Row, Nueva York, pp. 233-265 (con M. Morningstar). (Trad. japonesa, 1977.)

Technological innovations: Computer-assisted instruction and compensatory education. En F. Korten, S. Cook, & J. Lacey (Eds.), *Psychology and the problems of society*. American Psychological Association, Washington, D.C., pp. 221-236 (con M. Morningstar).

Estimated costs of computer assisted instruction for compensatory education in urban areas. *Educational Technology*, 10, 49-57 (con D. Jamison & C. Butler). Reimpreso en D. L. Roberts (Ed.), *Planning urban education*.

Educational Technology Publications, Englewood Cliffs, N. J., 1972, pp. 281-301.

Accelerated program in elementary-school mathematics—4.º año. *Psychology in the Schools*, 7, 111-126 (con C. Ihrke).

Computer-assisted instruction. *The Bulletin of the National Association of Secondary School Principals*, 54(343), 27-40.

1971

Foundations of measurement (Vol. 1). Academic Press, Nueva York (con D. H. Krantz, R. D. Luce, & A. Tversky).

Alternatives through computers. En B. Rusk (Ed.), *Alternatives in education*. Toronto: General, pp. 57-70.

Technology in education. En S. M. Brownell (Ed.), *Issues in urban education*. Yale University Press, New Haven, Conn., pp. 119-146.

Computer assisted instruction for deaf students. *American Annals of the Deaf*, 1971, 116, 500-508.

Archimedes's anticipation of conjoint measurement. En *Role and importance of logic and methodology of science in the study of the history of science*. Coloquio presentado en el Congreso Internacional de Historia y Ciencia, Moscú, 1971. Nauka, Moscú.

Young children's comprehension of logical connectives. *Journal of Experimental Child Psychology*, 12, 304-317 (con S. Feldman).

The computer teches arithmetic. *School Review*, 79(2), 213-225 (con B. Searle).

1972

Computer-assisted instruction at Stanford, 1966-68: Data, models, and evaluation of the arithmetic programs. Academic Press, Nueva York (con M. Morningstar).

Finite equal-interval measurement structures. *Theoria*, 38, 45-63.

On the problems of using mathematics in the development of the social sciences. En *Mathematics in the social sciences in Australia*. Australian Government Publishing Service, Canberra, pp. 3-15.

Stochastic models in mathematical learning theory. En *Mathematics in the social sciences in Australia*. Australian Government Publishing Service, Canberra, pp. 265-273.

Measurement: Problems of theory and application. En *Mathematics in the social sciences in Australia*. Australian Government Publishing Service, Canberra, pp. 613-622.

Some open problems in the philosophy of space and time. *Synthese*, 24,

298-316. Reimpreso en P. Suppes (Ed.), *Space, time and geometry*. Reidel, Dordrecht, 1973, pp. 383-401.

A probabilistic theory of causality (Veroyatnostnaya teoria prichinosti). *Voprosi Filosofi* 4, 90-102. (en ruso).

Computer-assisted instruction. En W. Handler & J. Weizenbaum (Eds.), *Display use for man-machine dialog*. Munich: Hanser, pp. 155-185.

Computer-assisted instruction at Stanford. En *Man and compueter*. (Reseña de Conferencia int., Burdeos 1970.) Karger, Basel, pp. 298-330. Reimpreso en K. L. Zinn & A. Romano (Eds.), *Computers in the instructional process: Report of an international school*. Mim., Ann Arbor, Mich., 1974, pp. 57-85.

Computer-assisted instruction in reading: Grados 4-6. *Educational Technology*, 12(8), 45-49 (con J. D. Fletcher).

A computer-assisted instruction program for exercises on finding axioms. *Educational Studies in Mathematics*, 4, 429-449 (con A. Goldberg).

Structural variables that determine the speed of retrieving words from long-term memory. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, 11, 770-777 (con E. F. Loftus).

Structural variables that determine problem-solving difficulty in computer-assisted instruction. *Journal of Educational Psychology*, 63, 531-542 (con E. F. Loftus).

1973

(Ed.) *Space, time and geometry*. Reidel, Dordrecht.

Logic, methodology and philosophy of science IV: Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971. North-Holland, Amsterdam (dirigido con L. Henkin, A. Joja, & Gr. C. Moisil).

Approaches to natural language: Proceedings of the 1970 Stanford workshop on grammar and semantics. Reidel, Dordrecht (dirigido con K. J. J. Hintikka & J. M. E. Moravcsik).

The concept of obligation in the context of decision theory. En J. Leach, R. Butts, & G. Pearce (Eds.), *Science, decision and value*. (Reseña de Fifth University of Western Ontario Philosophy Colloquium, 1969).) Reidel, Dordrecht, pp. 1-14.

Congruence of meaning. *Proceedings and Addresses of the American Philosophical Association*, 46, 21-38.

New foundations of objective probability: Axioms for propensities. En P. Suppes, L. Henkin, G. C. Moisil, & A. Joja (Eds.), *Logic, methodology, and philosophy of science IV: Proceedings of the Fourth International Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Bucharest, 1971*. North-Holland, Amsterdam, pp. 515-529.

Semantics of context-free fragments of natural languages. En K. J. J. Hintikka, J. M. E. Moravcsik, & P. Suppes (Eds.), *Approaches to natural language*. Reidel, Dordrecht, pp. 370-394.

Theory of automata and its application to psychology. En G. J. Dalenoort (Ed.), *Process models for psychology*. (Notas de NUFFIC International Summer Course, 1972). Rotterdam University Press, Rotterdam, pp. 78-123.

The French syntax of a child's noun phrases. *Archives de Psychologie*, **42**, 207-269 (con R. Smith y M. Léveillé).

Facts and fantasies of education. *Phi Delta Kappa Monograph*, Reimpreso en M. C. Wittrock (Ed.), *Changing education: Alternatives from educational research*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., pp. 6-45.

1974

Contemporary developments in mathematical psychology (Vol. 1). *Learning, memory, and thinking*. W. H. Freeman, San Francisco (dirigido con D. H. Krantz, R. C. Atkinson, & R. D. Luce).

Contemporary developments in mathematical psychology (Vol. 2). *Measurement, psychophysics, and neural information processing*. W. H. Freemn, San Francisco (dirigido con D. H. Krantz, R. C. Atkinson, & R. D. Luce).

The semantics of children's language. *American Psychologist*, **29**, 103-114.

The axiomatic method in the empirical sciences. En L. Henkin et al. (Eds.), *Proceedings of the Tarski Symposium, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, **25**. American Mathematical Society, Providence, R. I., pp. 465-479.

The measurement of belief. *Journal of the Royal Statistical Society* (Serie B), **36**, 160-175.

Aristotle's concept of matter and its relation to modern concepts of matter. *Synthese*, **28**, 27-50.

The essential but implicit role of modal concepts in science. En K. F. Schaffner & R. S. Cohen (Eds.), *PSA 1972*. Reidel, Dordrecht, pp. 305-314.

The structure of theories and the analysis of data. En F. Suppes (Ed.), *The structure of scientific theories* (2.ª ed.). University of Illinois Press, Urbana, pp. 266-283. (1.ª publ., 1974.) (Trad. castellana: La estructura de las teorías y el análisis de datos. En F. Suppes (Ed.), *La estructura de las teorías científicas*, trad. de P. Castrillo & E. Rada. Editora Nacional, Madrid, 1979).

Popper's analysis of probability in quantum mechanics. En P. A. Schilpp (Ed.), *The philosophy of Karl Popper* (Vol. 2). Open Court, La Salle, Ill., pp. 760-774.

Model-theoretic semantics for natural language. En C. H. Heidrich (Ed.), *Semantics and communication.* North-Holland, Amsterdam, pp. 285-344.

On the grammar and model-theoretic semantics of children's noun phrases. Colloques Internationaux du C.N.R.S. *Problèmes Actuels en Psycholinguistique,* 206, 49-60.

Cognition: A survey. En J. A. Swets & L. L. Elliott (Eds.), *Psychology and the handicapped child.* U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., pp. 109-126.

A survey of cognition in handicapped children. *Review of Educational Research,* 44, 145-176. Reimpreso en S. Chess & A. Thomas (Eds.), *Annual progress in child psychiatry and child development, 1975.* Brunner/Mazel, Nueva York, pp. 95-129.

The promise of universal higher education. En S. Hook, P. Kurtz, & M. Todorovich (Eds.), *The idea of a modern university.* Prometheus, Buffalo, N. Y., pp. 21-32.

The place of theory in educational research. *Educational Researcher,* 3(6), 3-10.

The effectiveness of alternative instructional media: A survey. *Review of Educational Research,* 44, 1-67 (con D. Jamison & S. Wells).

Foundations of stimulus sampling theory. En D. H. Krantz, R. C. Atkinson, R. D. Luce, & P. Suppes (Eds.), *Contemporary developments in mathematical psychology* (Vol. 1). *Learning, memory, and thinking.* San Francisco, pp. 163-183 (con W. K. Estes).

Measurement, Theory of. En *Encyclopaedia Britannica* (Vol. 11, 15.ª edición), pp. 739-745 (con R. D. Luce).

Automata. En E. C. Carterette & M. P. Friedman (Eds.), *Handbook of perception* (Vol. 1): *Historical and philosophical roots of perception.* Academic Press, Nueva York, pp. 335-362 (con W. Rottmayer).

Stochastic incompleteness of quantum mechanics. *Synthese,* 29, 311-330 (con M. Zanotti). Reimpreso en P. Suppes (Ed.), *Logic and probability in quantum mechanics.* Reidel, Dordrecht, 1976, pp. 303-322.

Mathematical models of learning and performance in a CAI setting. En K. L. Zinn, M. Refice, & A. Romano (Eds.), *Computers in the instructional process: Report of an international* school. Mim., Ann Arbor, Mich., pp. 339-353.

Structural variables affecting CAI performance on arithmetic word problems of disadvantaged and deaf students. *Educational Studies in Mathematics,* 5, 371-384 (con B. Searle & P. Lorton, Jr.).

Computer-assisted instruction in mathematics and language arts for deaf students. En *AFIPS conference proceedings* (Vol. 43). *1974 National Computer Conference.* AFIPS Press, Montvale, N. J., pp. 127-131 (con J. D. Fletcher).

The Committee on Basic Research in Education: A four year tryout of basic

science funding procedures. *Educational Researcher,* 3(2), 7-10 (con J. B. Carroll).

1975

From behaviorism to neobehaviorism. *Theory and Decision,* 6, 269-285.

Approximate probability and expectation of gambles. *Erkenntnis,* 9, 153-161.

A probabilistic analysis of causality. En H. M. Blalock, A. Aganbegian, F. M. Borodkin, R. Boudon, & V. Capecchi (Eds.), *Quantitative sociology.* Academic Press, Nueva York, pp. 49-77. (Trad. rusa, Mir, Moscú, 1977.)

Impact of computers on curriculum in the schools and universities. En O. Lecarme & R. Lewis (Eds.), *Computers in education, IFIP* (Part 1). North-Holland, Amsterdam, pp. 173-179.

The school of the future: Technological possibilities. En L. Rubin (Ed.), *The future of education: Perspectives on tomorrow's schooling.* Allyn & Bacon, Boston, pp. 145-157.

Performance models of American Indian students on computer-assisted instruction in elementary mathematics. *Instructional Science,* 4, 303-313 (con J. D. Fletcher & M. Zanotti).

1976

(Ed.) *Logic and probability in quantum mechanics.* Reidel, Dordrecht.

The Radio Mathematics Project: Nicaragua 1974-1975. Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford University, Stanford, California (con B. Searle and J. Friend).

Testing theories and the foundations of statistics. En W. L. Harper & C. A. Hooker (Eds.), *Foundations of probability theory, statistical inference, and statistical theories of science* (Vol. 2). Reidel, Dordrecht, pp. 437-455.

Elimination of quantifiers in the semantics of natural language by use of extended relation algebras. *Revue Internationale de Philosophie,* 117-118, 243-259.

Syntax and semantics of children's language. Rn W. R. Harnad, H. D. Steklis, & J. Lancaster (Eds.), *Origins and evolution of language and speech. (Annals of the New York Academy of Sciences,* 280, 227-237. Nueva York Academy of Sciences, Nueva York.

On the determinism of hidden variable theories with strict correlation and conditional statistical independence of observables. En P. Suppes (Ed.), *Logic and probability in quantum mechanics.* Reidel, Dordrecht, pp. 445-455 (con M. Zanotti).

Necessary and sufficient conditions for existence of a unique measure strictly

agreeing with a qualitative probability ordering. *Journal of Philosophical Logic*, **5**, 431-438 (con M. Zanotti).

La comprehension des marques d'appartenance par les enfants. *Enfance*, N.° 3, 309-318 (con M. Léveillé).

Models of individual trajectories in computer-assisted instruction for deaf students. *Journal of Educational Psychology*, **68**, 117-127 (con J. D. Fletcher & M. Zanotti).

Computer-assisted instruction in elementary logic at the university level. *Educational Studies in Mathematics*, **6**, 447-474 (con A. Goldberg).

Survey of the instructional use of radio, television, and computers in the United States. *Journal of the Society of Instrument and Control Engineers*, **15**, 712-720 (con B. Searle).

Home based education: Needs and technological opportunities. U.S. Department of Health, Education, and Welfare. National Institute of Education, abril (con E. Macken, R. van den Heuvel, & T. Suppes).

The Stanford project on computer-assisted instruction for hearing-impaired students. *Journal of Computer-Based Instruction*, **3**, 1-12 (con J. D. Fletcher).

Cost and performance of computer-assisted instruction for education of disadvantaged children. En J. Froomkin, D. T. Jamison, & R. Radner (Eds.), *Education as an industry*. NBER, Ballinger, Cambridge, Mass., pp. 201-240 (con D. T. Jamison, J. D. Fletcher, & R. C. Atkinson).

Evaluation studies of CCC elementary-school curriculums, 1971-1975. *CCC Educational Studies*, **1**, 1-37 (con E. Macken).

The Radio Mathematics Project. *The Mathematics Teacher (India)*, **11A**, 47-51 (con B. Searle).

1977

Is visual space Euclidean? *Synthese*, **35**, 397-421.

The distributive justice of income inequality. *Erkenntnis*, **11**, 233-250. Reimpreso en H. W. Gottinger & W. Leinfellner (Eds.), *Decision theory and social ethics*. Reidel, Dordrecht, pp. 303-320.

Learning theory for probabilistic automata and register machines, with applications to educational research. En H. Spada & W. F. Kempf (Eds.), *Structural models of thinking and learning* (Reseña del 7.° IPN-Symposium on Formalized Theories of Thinking and Learning and their Implications for Science Instruction). Hans Huber Publishers, Bern, pp. 57-79.

A survey of contemporary learning theories. En R. E. Butts & J. Hintikka (Eds.), *Foundational problems in the special sciences* (2.ª parte de la Reseña del Fifth International Congress of Logic, Methodology and

Philosophy of Science, Londres, Ontario, Canadá, 1975). Reidel, Dordrecht, pp. 217-239.

Some remarks about complexity. En *PSA, 1976* (Vol. 2). *Philosophy of Science Association*, East Lansing, Mich., pp. 543-547.

On using random relations to generate upper and lower probabilities. *Synthese*, 36, 427-440 (con M. Zanotti).

University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1975. *Instructional Science*, 6, 151-185 (con R. Smith & M. Beard).

The Nicaragua Radio Mathematics Project. En P. L. Spain, D. T. Jamison, & E. McAnany (Eds.), *Radio for education and development: Case studies* (Vol. 1). *A Document of the Education Department of the World Bank, Washington, D.C.*, pp. 2-32 (con B. Searle & J. Friend).

Computer usage in the Nicaragua Radio Mathematics Project. En J. A. Jordan, Jr., & K. Malaivongs (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Computer Applications in Developing Countries* (Vol. 2. Asian Institute of Technology, Bangkok, pp. 361-374 (con B. Searle).

1978

(Ed.) *Impact of research on education: Some case studies*. National Academy of Education, Washington, D.C.

The Radio Mathematics Project: Nicaragua 1976-1977. Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences Stanford, Calif. (dirigido con B. Searle & J. Friend).

A philosopher as psychologist. En T. S. Krawiec (Ed.), *The Psychologists: Autobiographies of Distinguished Living Psychologists* (Vol. 3). Clinical Psychology Publishing Co., Brandon, Vt., pp. 261-288.

Steps toward a variable-free semantics of attributive adjectives, possessives, and intensifying adverbs. En K. E. Nelson (Ed.), *Children's language* (Vol. 1). Gardner Press, Nueva York, 1978, pp. 81-115 (con E. Macken).

The future of computers in education. En *Computers and the learning society*. (Sesiones del Subcommittee on Domestic and International Scientific Planning, Analysis and Cooperation, of the Committee on Science and Technology, U.S. House of Representatives, Ninety-fifth Congress, 1.ª Sesión, octubre 4, 6, 12, 13, 18, and 27, 1977 [No. 47].) U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., pp. 548-569.

Performance models of undergraduate students on computer-assisted instruction in elementary logic. *Instructional Science*, 7, 15-35 (con I. Larsen and L. Z. Markosian).

The role of global psychological models in instructional technology. En R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 1). Erlbaum, Hillsdale, N. J., pp. 229-259 (con E. Macken & M. Zanotti).

Achievement levels of students learning primary-school mathematics by

radio in Nicaragua. *Studies in Science and Mathematics Education (India)*, 1, 63-80 (con B. Searle).

Psychoanalysis and American elementary education. En P. Suppes (Ed.), *Impact of research on education: Some case studies*. National Academy of Education, Washington, D.C., pp. 319-396 (con H. Warren).

Formal evaluation of the 1976 first-grade instructional program. En P. Suppes, B. Searle, & J. Friend (Eds.), *The Radio Mathematics Project: Nicaragua 1976-1977*. Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 97-124 (con B. Searle, P. Matthews, & J. Friend).

The historical path from research and development to operational use of CAI. *Educational Technology*, 18(4), 9-12 (con E. Macken).

La informática en la educación. *Nonotza, Revista de Difusión Científica, Tecnológica y Cultural*, 13, IBM de México.

1979

Self-profile. En R. J. Bogdan (Ed.), *Patrick Suppes*. Reidel, Dordrecht, pp. 3-56.

Replies. En R. J. Bogdan (Ed.), *Patrick Suppes*. Reidel, Dordrecht, pp. 207-232.

Variable-free semantics for negations with prosodic variation. En E. Saarinen, R. Hilpinen, I. Niiniluoto, & M. P. Hintikka (Eds.), *Essays in honour of Jaakko* Hintikka. Reidel, Dordrecht, pp. 49-59.

El estudio de las revoluciones científicas: teoría y metodología. En *La filosofía y las revoluciones científicas: Teoría y praxis*. Editorial Grijalbo, S. A., México, D.F., S.A., pp. 295-306.

The role of formal methods in the philosophy of science. En P. D. Asquith and H. E. Kyburg, Jr. (Eds.), *Current research in philosophy of science*. Philosophy of Science Association, East Lansing, Mich., pp. 16-27.

The logic of clinical judgment: Bayesian and other approaches. En H. T. Engelhardt, Jr., S. F. Spicker, and B. Towers (Eds.), *Clinical judgment: A critical appraisal*. Reidel, Dordrecht, pp. 145-159.

Logical inference in English: A preliminary analysis. *Studia Logica*, 38, 375-391.

Current trends in computer-assisted instruction. En M. C. Yovits (Ed.), *Advances in computers* (Vol. 18). Academic Press, Nueva York, pp. 173-229.

Probabilistic modelling the child's productions. En P. Fletcher & M. Garman (Eds.), *Language acquisition*. Cambridge University Press, Cambridge, England, pp. 397-417 (con M. Léveillé & R. Smith).

Projecting student trajectories in a computer-assisted instruction curriculum.

Journal of Educational Psychology, 71, 74-84 (con T. W. Malone, E. Macken, M. Zanotti, y L. Kanerva).

Toward optimal allocation of instructional resources: Dividing computer-assisted instruction time among students. *Instructional Science*, 8, 107-120 (con T. W. Malone & E. Macken).

Past, present and future educational technologies. En M.E.A. El Tom (Ed.), *Developing mathematics in third world countries*. North-Holland, Amsterdam, pp. 53-66.

The future of computers in education. *Journal of Computer-Based Instruction*, 6, 5-10.

1980

(Ed.) *Studies in the foundations of quantum mechanics*. Philosophy of Science Association. East Lansing, Mich.

Radio mathematics in Nicaragua. Stanford University, Stanford, Calif., Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences (dirigido con B. Searle & J. Friend).

A new proof of the impossibility of hidden variables using the principles of exchangeability and identity of conditional distribution. En P. Suppes (Ed.), *Studies in the foundations of quantum mechanics*. Philosophy of Science Association, East Lansing, Mich., 1980, pp. 173-191 (con M. Zanotti).

Procedural semantics. En R. Haller & W. Grassl (Eds.), *Language, logic, and philosophy* (Reseña del 4.° International Wittgenstein Symposium, Kirchberg am Wechsel, Austria 1979). Hölder-Pichler-Tempsky, Vienna, pp. 27-35.

Probabilistic empiricism and rationality. En R. Hilpinen (Ed.), *Rationality in science*. Reidel, Dordrecht, pp. 171-190.

Estimating total-test scores from partial scores in a matrix sampling design. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 687-699 (con J. Sachar).

Considerations in evaluating individualized instruction. *Journal of Research and Development in Education*, 14, 79-83 (con E. Macken & M. Zanotti).

Some remarks on statistical explanations. En G. H. von Wright (Ed.), *Logic and philosophy*. Martinus Nijhoff, The Hague, pp. 53-58.

Computer-assisted instruction in logic at Stanford. *Newsletter on Teaching Philosophy*, pp. 6-9.

1981

Logique du probable. París: Flammarion. Trad. italiana de Alberto Artosi. *La logica del probabile, un approccio bayesianoi alla razionalità*. Cooperativa Libraria Universitaria Editrice Bologna. Bolonia, Italia, 1984.

(Ed.) *University-level computer-assisted instruction at Stanford:* 1968-1980. Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif.

When are probabilistic explanations possible?, *Synthese*, 48, 191-199 (con M. Zanotti).

Application of learning models to speech recognition over a telephone. En P. Suppes (Ed.), *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1968-1980.* Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 589-600 (con D. G. Danforth & D. R. Rogosa).

CAI course in axiomatic set theory. En P. Suppes (Ed.), *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1968-1980.* Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 3-80 (con J. Sheehan).

CAI course in logic. En P. Suppes (Ed.), *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1968-1980.* Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 193-226 (con J. Sheehan).

Data compression of linear-prediction (LP) analyzed speech. En P. Suppes (Ed.), *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1968-1980.* Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 503-538 (con W. R. Sanders & C. Gramlich).

Studies of student preference for computer-assisted instruction with audio. En P. Suppes (Ed.), *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1968-1980.* Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 399-430 (con R. Laddaga & A. Levine).

Testing intelligibility of computer-generated speech with elementary-school children. En P. Suppes (Ed.), *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1968-1980.* Stanford University, University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 377-397 (con R. Laddaga & W. R. Sanders).

The plurality of science. En P. Asquith & I. Hacking (Eds.), *PSA 1978* (Vol. 2). Lansing, Mich.: Philosophy of Science Association, pp. 3-16.

Limitations of the axiomatic method in ancient Greek mathematical sciences. En J. Hintikka, D. Gruender, & E. Agazzi (Eds.), *Pisa Conference Proceedings* (Vol. 1). Reidel, Dordrecht, pp. 197-213.

En J. Speck (Ed.), *Handbuch wissenschaftstheoretischer Begriffe*. Vandenhock & Ruprecht, Göttingen, German).

Definition, Vol. 1, pp. 124-129; Grösse, Vol. 2, pp. 268-269; Mengenlehre, Vol. 2, pp. 411-415; Messung, Vol. 2, pp. 415-423; Observable, Vol. 2, p. 464.

Probability in relativistic particle theory. *Erkenntnis*, 16, 299-305.

Some remarks on hidden variables and the EPR paradox. *Erkenntnis*, 16, 311-314.
Scientific causal talk: A reply to Martin. *Theory and Decision*, 13, 363-380.
Direct inference in English. *Teaching Philosophy*, 4, 405-418.
Future educational uses of interactive theorem proving. En P. Suppes (Ed.), *University-level computer-assisted instruction at Stanford: 1968-1980*. Stanford University, Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, Stanford, Calif., pp. 165-182.
The limits of rationality. *Grazer Philosophische Studien*, 12/13, 85-101.
Causal analysis of hidden variables. En P. Asquith & R. Giere (Eds.), *PSA 1980*, Vol. 2. Philosophy of Science Association, East Lansing, Mich., pp. 563-571.
Sur les expériences d'enseignement assisté par ordinateur dans divers autres pays. En *Actes du colloque, Le mariage du siècle: Education et Informatique*. Ministère de l'Education, París, pp. 9-20.

1982

Variable-free semantics with remarks on procedural extensions. En T. W. Simon & R. J. Scholes (Eds.), *Language, mind, and brain*. Hillsdale, N. J.: Erlbaum, 1981, pp. 21-34.
Problems of causal analysis in the social sciences. *Epistemologia*, 5, 239-250.
Necessary and sufficient qualitative axioms for conditional probability. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, 60, 163-169 (con M. Zanotti).
Research on eye movements in arithmetic performance. En R. Groner and P. Fraisse (Eds.), *Cognition and eye movements*. North-Holland, Amsterdam, pp. 57-73 (con M. Cohen, R. Laddaga, J. Anliker & R. Floyd).
Rational allocation of resources to scientific research. En L. J. Cohen, J. Los, H. Pfeiffer, and K.-P. Podewski (Eds.), *Logic, methodology and philosophy of science, VI*. North-Holland, Amsterdam, pp. 773-789.
Alcuni risultati positivi e negativi sulla esistenza di cause. *Laboratorio di science dell'uomo* 3-4, junio, Uso e prospecttive delle scienze umane, 219-225 (con M. Zanotti).
On the effectiveness of educational research. En D. B. P. Kallen, G. B. Kosse, H. C. Wagenaar, J. J. J. Kloprogge, y M. Vorbeck (Eds.), *Social science research and public policy-making: A reappraisal*. NFER-Nelson, Windsor, Berks., England, pp. 255-270. Primera public. de la Foundation for Educational Research in the Netherlands (SVO).
Historical perspective on educational technology. En R. W. Bossone (Ed.), *Proceedings of The Second Conference of the University/Urban Schools National Task Force: What Works in Urban Schools*. Center for Advanced Study in Education, The Graduate School y University Center of the City University of New York, pp. 30-57.

1983

The meaning of probability statements. *Erkenntnis*, 19, 397-403.

Arguments for randomizing. En P. D. Asquith and T. Nickles (Eds.), *PSA 1982*. Philosophy of Science Association, East Lansing, Mich., pp. 464-475.

Heuristics and the axiomatic method. En R. Groner, M. Groner, and W. F. Bischof (Eds.), *Methods of heuristics*. Erlbaum, Hillsdale, N. J., pp. 79-88.

A procedural theory of eye movements in doing arithmetic. *Journal of Mathematical Psychology*, 27, 341-369 (con M. Cohen, R. Laddaga, J. Anliker, and R. Floyd).

Procedure scientifiche e razionalità. *Nuova Civiltà delle Macchine*, otoño, Año 5(4), 30-37.

Probability and information. (Comentario/Dretske: Knowledge and the flow of information.) *The Behavioral and Brain Sciences*, 6, 81-82.

Language learning in the limit. Revisado por K. Wexler and P. W. Culicover, *Formal principles of language acquisition. Contemporary Psychology*, 28, 5-6.

1984

Probabilistic metaphysics. Blackwell, Oxford.

Conflicting intuitions about causality. *Midwest Studies in Philosophy*, 9, 151-168.

A puzzle about responses and congruence of meaning. *Synthese*, 58, 39-50.

The next generation of interactive theorem provers. En R. E. Shostak (Ed.), *7th International Conference on Automated Deduction*, Napa, California, mayo 14-16 (*Lecture Notes in Computer Science*, 170). Springer-Verlag, Nueva York, pp. 303-315.

Student use of an interactive theorem prover. En W. W. Bledsoe and D. W. Loveland (Eds.), *Automated theorem proving: After 25 years*. American Mathematical Society, Providencia, R. I., 1984. *Contemporary Mathematics*, 29, 315-360 (con J. McDonald).

Causality and symmetry. En S. Diner, D. Fargue, C. Lochak, y W. Sellers (Eds.), *The ware-particle dualism*. Reidel, Dordrecht, pp. 331-340 (con M. Zanotti).

A note on discourse with an instructable robot. *Theoretical Linguistics*, 11, 5-20 (con R. E. Maas).

Observations about the application of artificial intelligence research to education. (Extractos con pequeñas modificaciones «Current trends in computer-assisted instruction.») En D. F. Walker and R. D. Hess (Eds.),

Instructional software: Principles and perspectives for design and use. Wadsworth, Belmont, Calif., pp. 298-308.

Computers: Past, present and future. En R. M. Bossone & J. H. Polishnook (Eds.), *Proceedings: The Fifth Conference of the University Urban Schools National Task Force.* The Graduate School of the City University of New York, pp. 112-123.

1985

Explaining the unpredictable *Erkenntnis,* 22, 187-195.

Davidson's views on psychology as a science. En B. Vermazen & M. B. Hintikka (Eds.), *Essays on Davidson: Actions & events.* Erlbaum, Oxford, Inglaterra; Hillsdale, N. J., pp. 183-194.

Some general remarks on the cognitive sciences. En W. Kintsch, J. R. Miller, & P. G. Polson (Eds.), *Method and tactics in cognitive sciences.* Erlbaum, Hillsdale, N. J., pp. 297-304.

Natural-language interface for an instructable robot. *International Journal of Man-Machine Studies,* 22, 215-240 (con R. E. Maas).

Computers and education in the 21st century. En *Proceedings of An International Conference on Social and Technological Change, The University into the 21st Century,* May 2-5, 1984, Victoria, B.C., Canada. Reimpreso en W. A. W. Neilson & C. Gaffield (Eds.), *Universities in crisis: A mediaeval institution in the twenty-first century.* The Institute for Research on Public Policy, Toronto, 1986, pp. 137-151.

Computer-assisted instruction: Possibilities and problems. *NASSP Bulletin,* 69(480), 30-34 (con R. F. Fortune).

The primacy of utterer's meaning. En R. E. Grandy & R. Warner (Eds.), *Philosophical grounds of rationality: Intentions, categories, ends.* Clarendon Press, Oxford, pp. 109-129.

Congruency theory of propositions. En *Mérites et limites des méthodes logiques en philosophie,* Coloquio internacional organizado por la Fondation Singer-Polignac en juin 1984. Librairie Philosophique J. Vrin, París, pp. 279-299.

Non-Markovian causality in the social sciences with some theorems on transitivity. *Synthese,* 68, 129-140.

En prensa

Axiomatic theories. En J. Eatwell, M. Milgate, & P. Newman (Eds.), *The New Palgrave, A Dictionary of Economic Theory and Doctrine.* The Macmillan Press Ltd., Londres.

Maximizing freedom of decision: An axiomatic analysis. En G. R. Feiwel (Ed.), *Arrow and the foundations of the theory of economic policy.*
Philosophical implications of Tarski's work. *Journal of Symbolic Logic.*
Propensity representations of probability. *Erkenntnis.*
Philosophy of science and public policy. En *PSA 1984* (Vol. 2).
Philosophy of Science Association, East Lansing, Mich.
Eye-movement models for arithmetic and reading performance. En E. Kowler (Ed.), *Eye movements and their role in visual and cognitive processes.* Elsevier/North-Holland Biomedical Press.
Comment on P. C. Fishburn's «The axioms of subjective probability.» *Statistical Science.*